Math. P. 361 b

Mittereder.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Anleitung

zur

Geometrie

für

Künstler und Werksleute

mit vorzüglicher Hinsicht

auf die Baukunst, und die damit verwandten Künste.

Von

Hermann Mitterer,

Lehrer der Zeichnungskunst an der männlichen Feiertagsschule in München.

Achte Auflage.

München, 1859.

Im Verlage der lithogr. Kunstanstalt der Handwerks-Feiertagsschule.

In Commission bei Friedrich Fleischer in Leipzig.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Druck der M. Pössenbacher'schen Buchdruckerei.

Digitized by Google

Vorrede.

Bey der großen Anzahl geometrischer Werke, die seit einiger Zeit für den Unterricht des gemeinen Mannes erschienen sind, scheint ein neues Werk dieser Art ganz entbehrlich zu seyn. Allein der meiste Theil dieser Lehrbücher beschäftigt sich außer den gewöhnlichen Lehrsätzen größten Theils nur mit der gemeinen Feldmeßkunst. Auf die Bedürfnisse der technischen Kunstfächer, und vorzüglich der Baukunst wurde wenig oder gar keine Rücksicht genommen. Bey meinem vieljährigen öffentlichen Unterrichte in der Zeichnungskunst für Künstler und Werksleute aller Art lernte

Digitized by Google

ich ihre Bedürfnisse genau kennen, und ordnete in diesem Werke die Gegenstände so, wie ich glaubte, daß sie zur Anwendung in den Kunstfächern am bequemsten wären, wodurch einige Aenderungen in dem gewöhnlichen Gange der Geometrie entstanden.

Bey der Erklärung des Maßes fand ich für nöthig, das neue französische Maß mit den dazu gehörigen Reductionen beyzufügen; weil bereits sehr wichtige Kunstwerke nach diesem Maße erschienen sind, wozu vorzüglich die vom Durand, Professor der Baukunst an der polytechnischen Schule in Paris, gehören. Die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel setzte ich dahin, wo ich glaubte, daß der Nutzen und die Nothwendigkeit davon am besten eingesehen würde. In dem Anhange wurden alle diejenigen Operationen zusammen gestellt, welche vorzüglich in der Baukunst am öftesten vorkommen; aber ohne Theorie, und bloß praktisch, weil sich sonst das Werk zu sehr ausgedehnt, und ganz andere Vorkenntnisse erfordert hätte, als man ge-

Digitized by Google

wöhnlich bey Künstlern und Werksleuten fordern kann.

Anstatt der bey andern geometrischen Werken am Ende angehängten Tabellen, ließ ich die Figuren zu mehrerer Bequemlichkeit dem Texte beydrucken; bediente mich aber anstatt der sonst gewöhnlichen Holzschnitte der Steinabdrücke, wodurch eine viel größere Reinheit in denselben hervor gebracht wurde. Da ich glaube, diese so vortreffliche Erfindung in meinem Vaterlande zuerst auf den Unterricht in den verschiedenen Kunstfächern angewandt zu haben, so wollte ich auch zu diesem Gebrauche einen Versuch nicht unterlassen, der in der Folge vielleicht noch für andere Gegenstände mit Nutzen angewandt werden könnte.

Uebrigens hoffe ich, wird der Künstler und Werksmann ohne andere Vorkenntnisse, als die der vier Rechnungsarten, und der Reesischen Regel, oder der Regel Detri in diesem Werke die nöthigsten Gegenstände der

Digitized by Google

Geometrie, und diejenigen Operationen sich eigen machen können, die er oft mit so vielem Verlangen in andern geometrischen Werken vergebens sucht, wodurch mein Bemühen, etwas zum Nutzen des Kunstwesens beyzutragen, vollkommen erreicht wird.

München, den 1. Oktober 1808.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

	Seite
Erklärungen über die Gegenstände der Geometrie	1
Von den Linien	2
Von den Winkeln	5
Von den Flächen	9
Zeichnung der Linien, Winkel und Flächen	14
Von dem Längenmaße	31
Von den verjüngten Maßstäben	38
Von den Grundsätzen	42
Zeichen, die in der Geometrie gebraucht werden	43
Die nöthigsten Lehrsätze	44
Die nöthigsten Lehrsätze vom Kreise	61
Von der wirklichen Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen auf dem Felde oder Bauplatze	77
Von den Verwandlungen der Figuren	102
Von der Ausrechnung der Flächen	111
Von der Aehnlichkeit der Figuren, und ihren Verhältnissen	134
Von der Vertheilung der Flächen	152

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Von der Ausziehung der Quadratwurzel . . 158

Von den geometrischen Körpern oder der Stereometrie 170

Von der Zeichnung und Ausmessung der Körper 177

Lehrsätze der Stereometrie 185

Von der Ausrechnung der Körper . . . 201

Entwicklung der Oberflächen der Körper, oder Zeichnung der Körpernetze . . 231

Von der Ausrechnung der Oberflächen der Körper 241

Von dem Walzenschnitte und seiner Anwendung auf die Ausrechnung der Gewölber 244

Von der Verwandlung der Körper . . . 260

Von der Ausziehung der Kubikwurzel . . 263

Anhang.

Von dem Aufzeichnen verschiedener gedruckter Bogen und anderer Linien, die in der Baukunst und den technischen Künsten vorkommen 272

Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von Flächen durchschnitten werden 285

Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von andern Körpern durchdrungen werden . . . 307

Von der Beschreibung einiger Linien auf den gebogenen Oberflächen der Körper . . 320

Digitized by Google

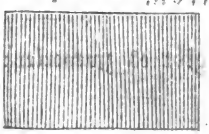
Geometrie.

Erklärungen über die Gegenstände derselben.

Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche von der Größe und Ausmessung der Linien, Flächen und Körper handelt.

2. Betrachtet man eine Sache bloß nach ihrer Länge, so hat man eine Linie.

Betrachtet man sie nach ihrer Länge und Breite, so hat man eine Fläche.



Kommt zur Länge und Breite auch noch die Dicke, Höhe oder Tiefe; so gibt dieß einen Körper.

Digitized by Google

3. Linien, Flächen und Körper sind also die Gegenstände der Geometrie.

4. Die Gränze einer Linie ist der Punkt, welcher, im eigentlichen Sinne betrachtet, gar keine Ausdehnung hat. Eben so hat auch die eigentliche Linie gar keine Dicke, und ist bloß die Gränze einer Fläche; und die Fläche im nämlichen Sinne die Gränze eines Körpers. Sie können also nur in unserer Vorstellung bestehen; aber nicht wirklich gezeichnet werden; daher diejenigen Linien und Punkte, die wir auf dem Papiere bemerken, bloße Zeichen der wirklichen Linien und Punkte sind.

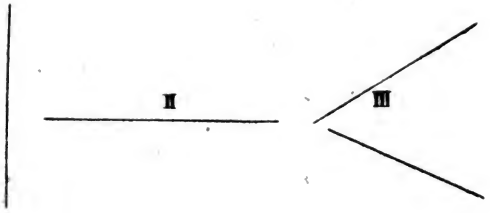
5. Die Ausmessung der Linien nennt man die Longimetrie, die Ausmessung der Flächen die Planimetrie, und die Ausmessung der Körper die Stereometrie. Wir werden zuerst von den Linien und Flächen, weiter unten aber von den Körpern handeln.

Von den Linien.

6. Erklärungen. Linien gibt es zweyerley:

Gerade und krumme. Die geraden erhalten nach ihrer Lage verschiedene Benennungen, als:

Digitized by Google



I. Senkrechte (Perpendiculäre), welche nach der Richtung des Senkbleyes gezogen werden, und sich weder mehr zur Rechten, noch zur linken Seite wenden.

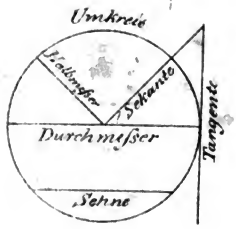
II. Wagrechte (Horizontale), die nach der Richtung des Wagebalkens sich weder mehr aufwärts, noch abwärts neigen.

III. Schiefe, die eine Neigung seitwärts, auf- oder abwärts haben.

7. Parallel-Linien nennt man zwey gerade Linien, welche in allen ihren Theilen gleich weit von einander entfernt sind.

8. Krumme Linien gibt es vielerley, wovon aber nur die Kreislinie in der Elementar-Geometrie vorkommt; wo sie zur Zeichnung der meisten Figuren gebraucht wird.

Digitized by Google



9. Der Kreis entsteht, wenn sich ein Punkt um einen andern festen Punkt in beständig gleicher Entfernung herum bewegt.

Der feste Punkt ist der Mittelpunkt (Centrum), die beschriebene krumme Linie wird der Umkreis (Peripherie), und diejenige, die von dem Mittelpunkte bis an den Umkreis gezogen wird, der Halbmesser (Radius) genannt. Jede gerade Linie, die von einem Punkte des Umkreises zu einem andern Punkte desselben gezogen wird, heißt eine Sehne (Corde). Geht eine solche Linie durch den Mittelpunkt, so hat man die größte Sehne, oder den Durchmesser (Diameter). Jede Linie, die den Umkreis berührt, nennt man eine Berührungslinie (Tangente), und diejenige, welche, wenn sie verlängert wird, die Tangente schneidet, eine Schneidlinie (Secante). Ein Theil des Umkreises, er mag groß oder klein seyn, wird ein Bogen genannt. Der vierte Theil eines Kreises heißt ein Quadrant, und der sechste ein Sextant.

10. Den Umkreis theilt man in der Geome-

Digitized by Google

trie in 360 Theile, die man Grade nennt. Ein jeder Grad wird wieder in 60 Theile, die man Minuten, und diese in 60 andere, die man Secunden nennt, eingetheilt.

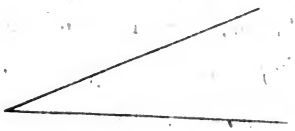
11. Das Zeichen der Grade ist ein kleiner Ring, das der Minuten ein Strich, und das der Secunden zwey Striche.

40° 10′ 9″

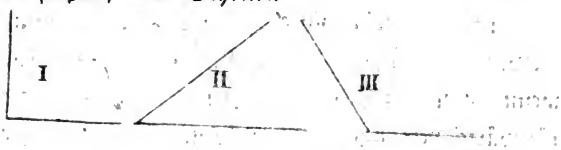
Vierzig Grade, zehn Minuten, neun Secunden.

Von den Winkeln.

12. Erklärungen. Wenn zwey Linien zusammen stoßen, so machen sie bey ihrem Zusammenstoßungs-Punkte einen Winkel.



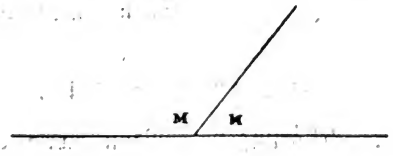
Die zwey zusammen stoßenden Linien nennt man Schenkel, und den Punkt, wo sie zusammen stoßen, den Scheitel.



Winkel gibt es dreyerley: I. rechte, II. spitzige und III. stumpfe. Stößt eine gerade Linie

Digitized by Google

so auf eine andere, daß sie sich weder mehr zur rechten, noch zur linken Seite wendet; so gibt dieses einen rechten Winkel I., welches allemal geschieht, wenn eine senkrechte auf eine wagrechte stößt. Ist der Winkel größer, als ein rechter so nennt man ihn einen stumpfen III.; ist er aber kleiner, als ein rechter, so wird er ein spitziger Winkel II. genannt.

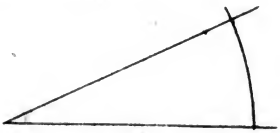


13. Zwey Winkel, die einen Schenkel gemeinschaftlich, und die andern zwey auf einer geraden Linie haben, nennt man Nebenwinkel, wie **M** und **N**.

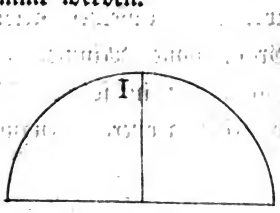
14. Scheitelwinkel, oder Verticalwinkel werden diejenigen genannt, welche entstehen, wenn man die beyden Schenkel eines Winkels rückwärts verlängert; oder wenn sich zwey gerade Linien einander durchschneiden. So sind **M** und **O**, **N** und **X** Scheitelwinkel.

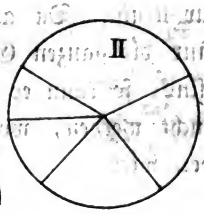
15. Bey der Größe eines Winkels kommt

es nicht auf die Länge der Linien, sondern bloß auf ihre Neigung gegen einander an.



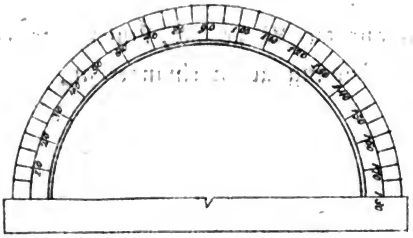
16. Da sich aus dem Scheitel eines jeden Winkels ein Bogen beschreiben läßt; so kann das Maß eines Winkels nach der Anzahl der Grade, welche er auf dem Umkreise einnimmt, bestimmt werden.



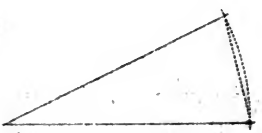


17. Theilt man den halben Umkreis I., welcher 180° hält, durch eine auf der Mitte des Durchmessers errichtete senkrechte in zwey gleiche Theile; so erhält man für den rechten Winkel 90°. Der ganze Umkreis enthält also 4 rechte Winkel, welche zusammen 360° ausmachen. Alle Winkel, welche um einen Punkt herum gezeichnet werden können, halten gleichfalls 360°, weil man aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte eine Kreislinie beschreiben kann, Fig. II., die ihnen allen mit einander zum Maße dienet.

Digitized by Google



18. Um die Winkel nach der Anzahl ihrer Grade auf das Papier aufzutragen, bedienet man sich eines in seine Grade eingetheilten halben Kreisbogens von Messing, den man Transporteur nennt. Da aber auf demselben gewöhnlich nur die ganzen Grade ohne Minuten angezeigt sind; so kann er auch nur in solchen Fällen gebraucht werden, wo keine größere Genauigkeit erfordert wird.

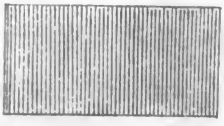


19. Zieht man von den beyden Endespunkten des Bogens eine Sehne; so bestimmt auch diese die Größe des Winkels. Weiß man also die Länge der beyden Schenkel oder Halbmesser und die Länge der Sehne; so kann der Winkel auch ohne Gradinstrumente genau aufgetragen werden.

Digitized by Google

Von den Flächen.

20. Erklärungen. Eine Flächenfigur ist ein von allen Seiten begränzter Raum. Die Gränzen einer Figur sind die Linien, welche dieselbe umgeben, und die man einzeln die Seiten, alle zusammen aber den Umfang nennet.



21. Flächen gibt es zweyerley: gerade und krumme. Gerade sind diejenigen, auf welchen jede gerade Linie, nach allen Richtungen, in allen ihren Theilen aufliegt, oder dieselbe berührt; krumm sind alle übrigen, die bauchig oder hohl sind, wie die einer Kugel, Walze oder Röhre.

22. Die geraden Flächenfiguren werden entweder mit geraden oder krummen Linien eingeschlossen.

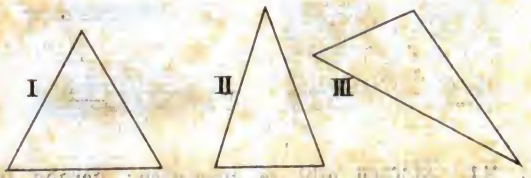
23. Um einen Raum mit geraden Linien einzuschließen, muß man wenigstens drey dieser Linien haben, die auch zugleich drey Winkel bilden.

24. Jede Figur hat so viele Seiten, als sie Winkel hat. Von der Anzahl dieser Winkel oder Ecken erhalten verschiedene Gattungen von Figuren ihre Namen. Ist die Figur von drey

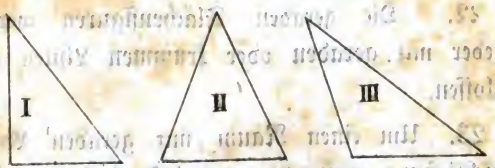
Digitized by Google

Linien und Winkeln umgeben; so wird sie ein Dreyeck, von vier ein Viereck, von fünf ein Fünfeck, u. s. w. genannt.

25. Da man in jedem Dreyecke drey Seiten und drey Winkel bemerkt; so gibt es dreyerley in Rücksicht der Seiten, und dreyerley in Rücksicht der Winkel.



In Rücksicht der Seiten. Sind die drey Seiten einander gleich, so nennt man es ein gleichseitiges Dreyeck I.; sind nur zwey Seiten einander gleich, ein gleichschenklichtes II.; sind alle drey Seiten ungleich, ein ungleichseitiges Dreyeck III.

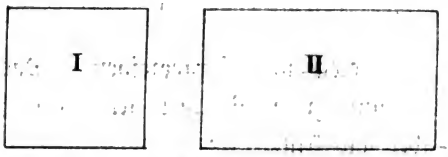


In Rücksicht der Winkel. Ist in dem Dreyecke ein rechter Winkel, so heißt dasselbe ein rechtwinklichtes I.; befinden sich darin drey spitzige, so wird es ein spitzwinklichtes II., und enthält es einen stumpfen Winkel, ein stumpfwinklichtes Dreyeck III. genannt.

Digitized by Google

26. In dem rechtwinklichten Dreyecke erhalten die Seiten bestimmte Namen: die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die Hypotenuse; die übrigen zwey Seiten nennt man Lothen oder Katheten.

27. Vierecke gibt es sechserley, als:



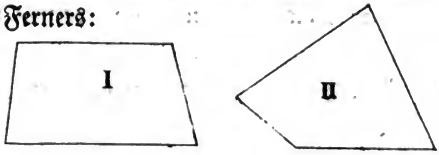
Quadrate und Rechtecke. Ein Quadrat hat vier rechte Winkel, und vier gleiche Seiten **I.** Ein Rechteck oder länglichtes Viereck **II.** hat ebenfalls vier rechte Winkel, aber nur die zwey gegenüber stehenden Seiten einander gleich.

Gleichseitige und länglichte Rauten. Die gleichseitige Raute (Rhombus) **I.** ist ein verschobenes Quadrat, und hat vier gleiche Seiten, aber nur die zwey gegenüber stehenden Winkel einander gleich. Die länglichte Raute (Rhomboid) **II.** ist ein verschobenes Rechteck, und hat sowohl die gegenüber stehenden Seiten, als Winkel einander gleich.

Digitized by Google

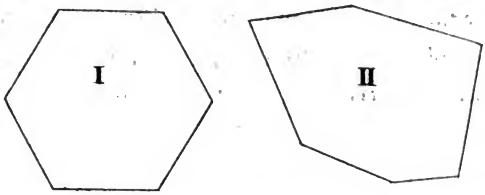
Diese vier Arten von Vierecken werden Parallellogramme genannt; weil die gegenüber stehenden Seiten mit einander parallel laufen.

Ferners:

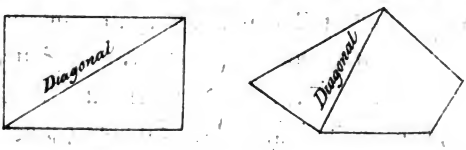


Trapezen und Trapezoiden. Das Trapez I. hat nur zwey Parallelseiten, das Trapezoid II. aber gar keine.

28. Alle Figuren, die mehr, als vier Seiten haben, nennet man Vielecke (Polygone).



Es gibt deren zweyerley: regelmäßige I. und unregelmäßige II.; die ersten haben lauter gleiche Seiten und Winkel, die zweyten aber nicht.

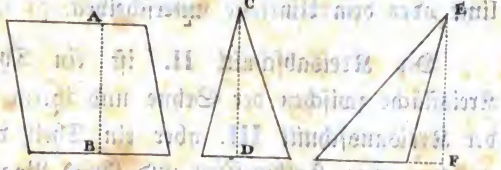


29. Zieht man von einem Winkel eines Viereckes oder Vieleckes eine Linie in den gegen-

Digitized by Google

über stehenden; so wird diese die Diagonallinie genannt.

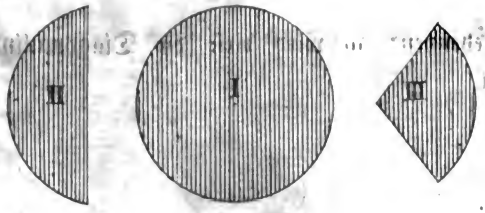
30. Diejenige Seite, auf welcher eine geradlinichte Figur steht, heißt die Grundlinie (Basis).



31. Unter der Höhe einer Figur versteht man die senkrechte Linie, welche von der obern Seite oder Spitze derselben auf die Grundlinie herunter gefällt wird, wie **A B**, **C D**. Fällt die Spitze über die Grundlinie hinaus; so muß diese verlängert werden, wie bei **F**, wo **E F** die Höhe des Dreyeckes ist.

32. Von den geraden Flächenfiguren, welche mit krummen Linien eingeschlossen sind, ist die Kreisfläche die vorzüglichste, zu welcher noch der Kreisabschnitt, und der Kreisausschnitt kommt.

Digitized by Google



Die Kreisfläche ist diejenige Fläche, welche von einer ganzen Kreislinie begränzt ist. Der Anfänger soll diese Fläche wohl von der Kreislinie oder dem Umkreise unterscheiden.

Der Kreisabschnitt **II.** ist ein Theil der Kreisfläche zwischen der Sehne und ihrem Bogen; der Kreisausschnitt **III.** aber ein Theil derselben zwischen zwey Halbmessern und ihrem Bogen.

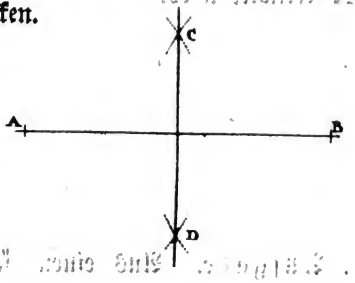
Zeichnung der Linien, Winkel und Flächen.

33. **Anmerkung.** Bey der Zeichnung dieser Gegenstände hat man einen guten Theilzirkel, einen Einsatz- oder Stockzirkel, in welchen man ein Bleyrohr mit seinem Bleystifte setzen kann, und ein Paar Reißfedern nöthig, wovon eine in den Einsatzzirkel, um krumme Linien zu ziehen, die andere aber zum Zeichnen gerader Linien gebraucht wird. Zu diesem kommt noch ein gutes Lineal, und etwa

ein rechtwinklichtes Dreyeck von Holz, um senkrechte Linien, wie unten folgt, zu errichten. Die Linien werden zuvor mit Bleystift gezogen, und dann mit schwarzem Tusche ausgezeichnet. Die fehlerhaften Bleystiftslinien können mit elastischem Gummi ausgelöscht werden.

34. Aufgabe. Ein Lineal zu prüfen.

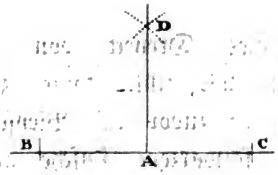
Man ziehe damit eine feine Linie, und lege die nämliche Seite des Lineals, nach welcher man die Linie gezogen hat, oberhalb an dieselbe; so werden sich diese, wenn das Lineal gerade ist, einander decken.



35. Aufgabe. Eine senkrechte Linie auf eine wagrechte so zu errichten, daß sie diese in zwey gleiche Theile zertheilt.

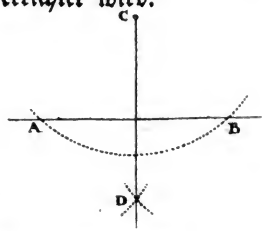
Man ziehe die Linie **AB**, die man als eine horizontale annimmt; setze den Zirkel in die Endespunkte **A** und **B**, und mache oben bey **C** und unten bey **D** Kreuzbogen, durch welche die Linie **CD** gezogen wird, die senkrecht auf **AB** steht, und diese in zwey gleiche Theile zertheilet.

Digitized by Google



36. Aufgabe. Eine senkrechte Linie auf einem bestimmten Punkte A zu errichten.

Man setze den Zirkel in A, und mache zwey Abschnitte in B und C, auf welche der Zirkel eingesetzt, die Kreuzbogen oben bey D gezogen und die senkrechte Linie AD auf dem bestimmten Punkte A errichtet wird.



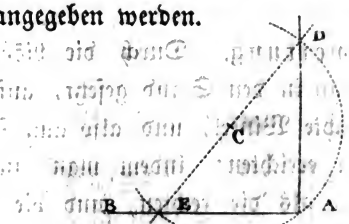
37. Aufgabe. Aus einem über der Linie AB gegebenen Punkte C eine senkrechte zu fällen.

Man setze den Zirkel in C, und mache den Bogen AB, setze ihn dann in A und B, und mache die Kreuzbogen bey D, so ist CD senkrecht auf AB.

Da in den drey obigen Fällen die Zirkelöffnungen zu den Kreuzbogen überall gleich sind; so kann sich die durch selbe gezogene Linie weder mehr zur rechten, noch zur linken Seite wenden, und ist also überall senkrecht.

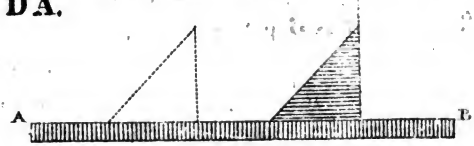
Digitized by Google

38. **Anmerkung.** Die Gründe der nachfolgenden Aufgaben, die nicht schon aus den vorausgegangenen Bestimmungen der Figuren klar sind, werden weiter unten bey den Lehrsätzen angegeben werden.



39. **Aufgabe.** Eine senkrechte am Ende einer Linie **AB** zu errichten, hier in **A**.

Man wähle sich einen willkührlichen Punkt **C**, aus welchem man den Zirkel bis an den Endpunkt **A** öffnet, und einen Bogen beschreibt, welcher die Linie **AB** in **E** durchschneidet. Man lege dann das Lineal an den Punkt **E** und **C**, durchschneide den Bogen bey **D**, und ziehe die senkrechte **DA**.



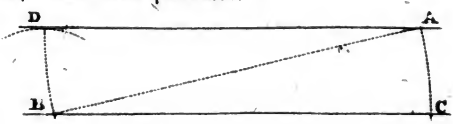
40. **Aufgabe.** Eine senkrechte Linie mittelst eines rechtwinklichten Dreyeckes zu errichten.

Man ziehe eine wagrechte **AB**, lege das Lineal an selbe, und an dieses das rechtwinklichte Dreyeck, so können durch Hin- und Herschieben senkrechte Linien sehr bequem und richtig gezogen werden.

41. Anmerkung. Durch die bisherigen Aufgaben ist man in den Stand gesetzt, auf verschiedene Art rechte Winkel, und also auch spitzige und stumpfe zu errichten; indem man nur die spitzigen kleiner, als die rechten, und die stumpfen größer als die rechten machen darf.

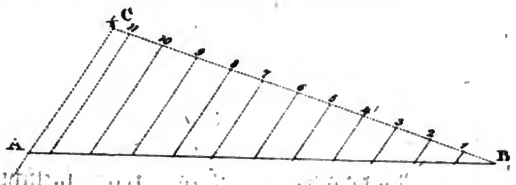
42. Aufgabe. Parallellinien zu ziehen.

Man beschreibe über der gegebenen Linie **AB** mit gleicher Zirkelöffnung ein Paar Bogen, lege das Lineal an selbe, und ziehe die Linie **CD**; so ist diese mit **AB** parallel.



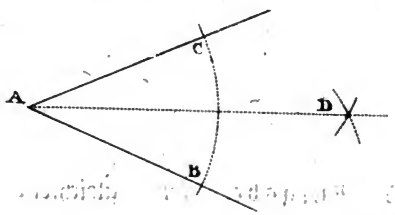
43. Ist der Punkt **A** gegeben, durch welchen die Parallellinie gehen soll; so ziehe man **AB** willkührlich, setze den Zirkel in **B**, ziehe den Bo-

gen AC, und aus A den Bogen BD, mache mit der Oeffnung von CA aus B den Kreuzbogen bey D; so ist AD parallel mit BC.



44. Aufgabe. Eine Linie AB in gleiche und ungleiche Theile zu zertheilen, hier in 11½.

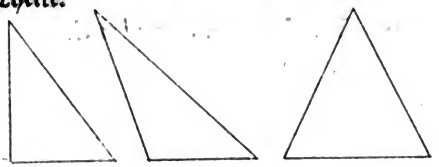
Man ziehe aus dem Punkte B die Linie BC willkührlich, und schneide von B nach C die verlangte Anzahl von Theilen mit einer beliebigen Zirkelöffnung ab; ziehe aus A die Linie AC, und mache mit AC lauter Parallelen auf AB; so wird auch diese in eben so viele Theile zertheilt, als BC.



45. Aufgabe. Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu zertheilen.

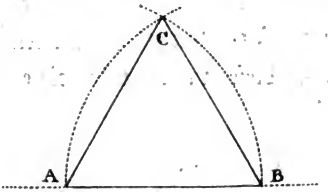
Man setze den Zirkel in A, mache die gleichen Abschnitte bey B und C, setze dann den Zirkel in B und C, und ziehe die Kreuzbogen bey D;

so theilet die Linie **AD** den Winkel **A** in zwey gleiche Theile.



46. **Aufgabe.** Ein rechtwinklichtes, stumpfwinklichtes, und spitzwinklichtes Dreyeck zu zeichnen.

Man schließe einen rechten oder stumpfen Winkel mit einer Seite; so hat man ein recht- oder stumpfwinklichtes Dreyeck. Bey dem spitzwinklichten Dreyecke mache man aber drey spitzige Winkel.

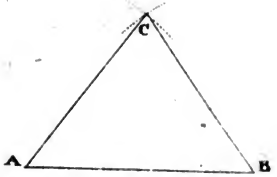


47. **Aufgabe.** Ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Man ziehe die Linie **AB**, setze den Zirkel in **A**, öffne ihn bis **B**, mache oben bey **C** aus **A** und **B** Kreuzbogen, und ziehe die Linien **AC** und **BC**.

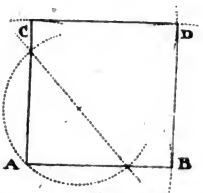
48. **Aufgabe.** Ein gleichschenklichtes Dreyeck zu verfertigen.

Digitized by Google



Man ziehe die Linie **AB**, setze den Zirkel in **A** und **B**, mache die Oeffnung größer, als die Hälfte von **AB**, und ziehe die Kreuzbogen bey **C**, so werden die Schenkel **AC** und **BC** einander gleich.

49. Ungleichseitige Dreyecke werden aus drey ungleichen Seiten, wovon zwey zusammen allemal größer, als die dritte seyn müssen, willkührlich zusammen gesetzt.

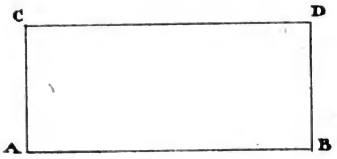


50. **Aufgabe.** Ein Quadrat zu zeichnen.

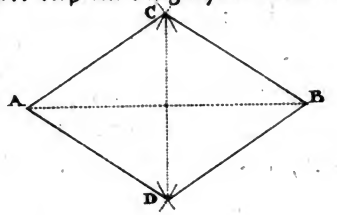
Man ziehe die Linie **AB**, und errichte bey **A** einen rechten Winkel, wie oben gezeigt wurde, setze den Zirkel in **A**, mache bey **B** und **C** mit einer willkührlichen Zirkelöffnung Durchschnitte, setze dann den Zirkel in **B** und **C**, ziehe die Kreuzbogen bey **D**, und verbinde sie mit geraden Linien.

51. **Aufgabe.** Ein Rechteck oder längliches Viereck zu zeichnen.

Digitized by Google

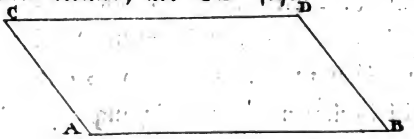


Man errichte auf der Linie **AB** einen rechten Winkel, mache **AC** kleiner oder größer, als **AB**, ziehe **CD** parallel mit **AB**, und **BD** parallel mit **AC**; so gibt dieß ein länglichtes Viereck.



52. **Aufgabe.** Eine gleichseitige Raute zu verfertigen.

Man ziehe eine Linie **AB**, setze den Zirkel in **A** und **B**, mache die Kreuzbogen bey **C** und **D**, und verbinde die Punkte **ABCD** mit Linien. Damit aber kein Quadrat entstehe, muß **AB** größer oder kleiner, als **CD** seyn.



53. **Aufgabe.** Eine länglichte Raute zu zeichnen.

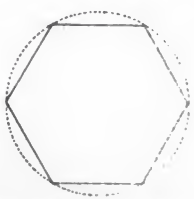
Digitized by Google

Man ziehe mit der Linie **AB** eine andere **CD** parallel, und mache eine willkührliche schiefe **AC**; nehme dann **AB** in den Zirkel, und trage sie aus **C** in **D**, wodurch die Linien **BD** und **AC** ebenfalls parallel werden, und also die längliche Raute bilden.

54. Aufgabe. Ein Paralleltrapez zu zeichnen.

Man ziehe **AB** mit **CD** parallel, und die Linien **AC** und **BD** nach ungleichen Richtungen.

Die Trapezoiden können aus vier Linien, wovon keine mit der andern parallel läuft, nach Willkühr zusammen gesetzt werden.



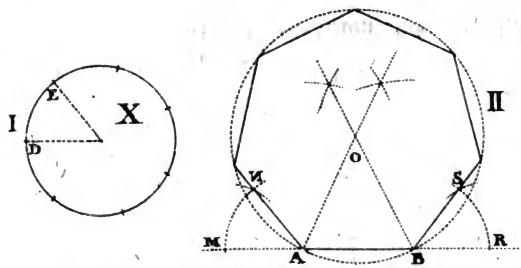
55. Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Man mache einen Kreis, theile denselben in mehrere gleiche Theile, und ziehe die Theilungspunkte mit geraden Linien zusammen.

Digitized by Google

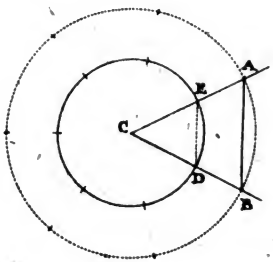
Bey dem regelmäßigen Sechsecke kann der Halbmesser als die Seite gebraucht werden; weil man diesen genau sechsmal auf der Peripherie herum tragen kann, wie wir weiter unten sehen werden.

Bey Vielecken, wo sich die Anzahl der Theile in andere größere zerfällen läßt, kann man sich am bequemsten der Unterabtheilungen bedienen. So theilt man z. B. in einem Vielecke von 24 Seiten zuerst den Kreis in 6 gleiche Theile, und halbirt jeden derselben zweymal, so erhält man 24 gleiche Theile. Lassen sich aber die gegebenen Theile nicht in andere zerfällen, wie 7, 11 ꝛc.; so muß man schon seine Zuflucht zu den Versuchen mit dem Zirkel nehmen, welche für die gewöhnlichen Fälle hinreichend sind.



56. **Aufgabe.** Auf eine gegebene Linie **AB** ein regelmäßiges Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten zu zeichnen, hier ein Siebeneck.

Man theile einen Kreis **X** Fig. **I.** von willkührlicher Größe durch Verſuche in ſieben gleiche Theile, mache mit dem Halbmeſſer dieſes Kreiſes aus den Punkten **A** und **B** Fig. **II.** der gegebenen Linie **AB** die Bogen **MN** und **RS**, nehme bey **X.** Fig. **I.** den Bogen **DE**, und trage ihn Fig. **II.** von **M** nach **N**, und von **R** nach **S** mit Durchſchneidungen; ſo hat man die beyden Polygonwinkel bey **A** und **B.** Wird nun jeder dieſer beyden Winkel in zwey gleiche Theile getheilt; ſo werden ſich die Theilungs-Linien in **O** ſchneiden, und den Mittelpunkt eines Kreiſes bilden, auf welchem die Seite **AB** ſiebenmal herum getragen werden kann.

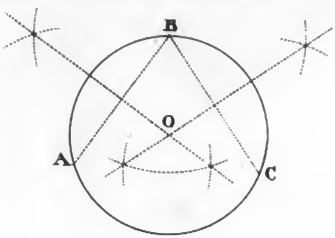


57. Theilt man einen willkührlichen Kreis in ſieben gleiche Theile, und verlängert die Halbmeſſer **CD** mit **CE**; ſo kann die gegebene Linie **AB** parallel mit **DE** hinein getragen, und mit dem Halbmeſſer **AC** ein Kreis beſchrieben werden, worauf ſich die Sehne **AB** ſiebenmal herum tragen läßt.

Digitized by Google

Unregelmäßige Vielecke werden aus willkührlichen Seiten und Winkeln zusammen gesetzt.

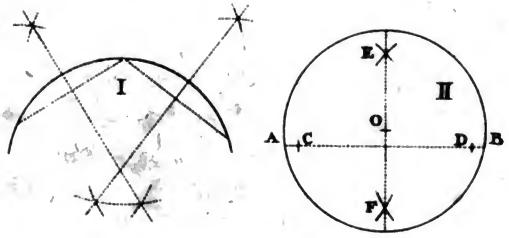
58. **Anmerkung.** Die Zeichnung der Flächen-Figuren nach einem bestimmten Maße ihrer Linien und Winkel kann erst weiter unten gezeigt werden. Das Bisherige dient theils zur Uebung mit Zirkel und Lineal, theils auch zum wirklichen Gebrauche bey verschiedenen Vorfällen, wo das Maß nach Willkühr angenommen werden kann. Hieher gehören auch noch die nachfolgenden Aufgaben, deren Gründe ebenfalls weiter unten vorkommen sollen.



59. **Aufgabe.** Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

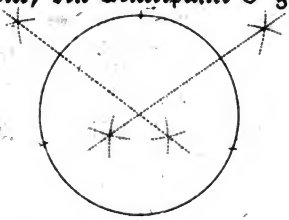
Man bestimme drey willkührliche Punkte **ABC**, welche man mit Sehnen verbindet; setze auf die Mitte derselben senkrechte Linien, und verlängere sie so lange, bis sie sich in **O** durchschneiden; wo sich auch der Mittelpunkt des Kreises befinden wird.

Digitized by Google



60. Auf die nämliche Art kann auch der Mittelpunkt eines Bogens gefunden werden, wie die Figur I. zeigt.

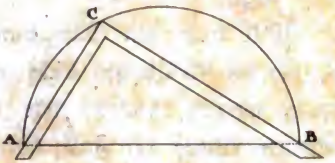
61. II. Will man den Mittelpunkt eines Kreises finden, wo die Kreuzbogen nicht außerhalb demselben gemacht werden können, wie dieß bey einer abgeschnittenen Walze der Fall ist; so ziehe man ungefähr in der Mitte derselben eine willkührliche Sehne **AB**, nehme von außen zwey gleichweit entfernte Punkte **C** und **D**, und mache aus diesen die Kreuzbogen bey **E** und **F**, so ist **EF** der Durchmesser, welcher, in zwey gleiche Theile getheilt, den Mittelpunkt **O** gibt.



62. Sind bloß drey Punkte gegeben; so kann man auch diese in einen Kreis bringen, wenn sie nur nicht in gerader Linie stehen.

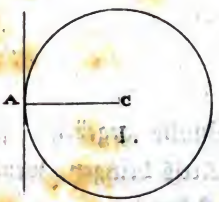
Digitized by Google

63. Eben so wird auch ein Kreis um ein Dreyeck beschrieben, wenn man zwey Seiten als Sehnen ansieht, und wie oben verfährt.

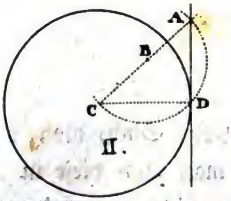


64. **Aufgabe.** Ein Winkelmaß zu prüfen.

Man beschreibe über dem Halbmesser **AB** einen halben Kreisbogen, lege einen Schenkel des Winkelmaßes an das Ende des Durchmessers **B**, und die Spitze des Winkels an die Peripherie bey **C**; so muß der andere Schenkel das andere Ende des Durchmessers **A** genau durchschneiden, wenn das Winkelmaß den rechten Winkel haben soll.



I.



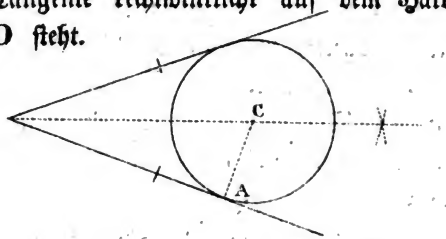
II.

Digitized by Google

65. Aufgabe. Eine richtige Tangente zu ziehen, welche die Kreislinie in einem bestimmten Punkte A berührt, aber nicht schneidet.

Fig. I. Man verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkte C, und errichte auf A eine senkrechte, so wird diese den Kreis genau berühren, und denselben nirgends durchschneiden; denn die Tangente steht jedesmal senkrecht auf ihrem Halbmesser, wie wir weiter unten hören werden.

66. Fig. II. Eben so kann auch der Berührungspunkt einer Tangente gefunden werden, wenn man einen Punkt A derselben mit dem Mittelpunkte C verbindet, die ganze Linie AC in zwey gleiche Theile zertheilt, und mit der Hälfte BC einen halben Kreisbogen beschreibt, welcher den Berührungspunkt genau durchschneidet; weil wieder die Tangente rechtwinklicht auf dem Halbmesser CD steht.

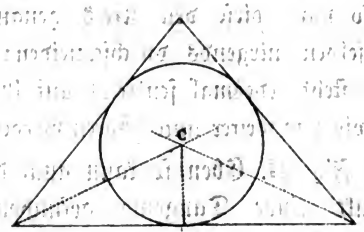


67. Aufgabe. Einen Kreis so in einen Winkel zu beschreiben, daß er die Schenkel desselben berühret.

Man theile den Winkel in zwey gleiche Theile, und errichte auf einem gegebenen Punkte

Digitized by Google

eines Schenkels, hier in A, eine senkrechte Linie; wo diese die Theilungslinie in C durchschneidet, dort ist der Mittelpunkt des Kreises, und AC dessen Halbmesser, auf welchem der Schenkel zur Tangente wird.



68. Aufgabe. Einen Kreis in ein Dreyeck so zu beschreiben, daß die Seiten Tangenten des Kreises werden.

Man theile zwey Winkel, jeden in zwey gleiche Theile, wo sich die Theilungslinien in C durchkreuzen, fälle man Perpendikel auf die Seiten des Dreyeckes; so werden diese eine gleiche Länge haben, und also die Halbmesser des Kreises bilden.

69. Anmerkung. Da die bisherigen Aufgaben sehr oft in den technischen Künsten, und vorzüglich in der Baukunst und Mechanik vorkommen, so hat man sie gleich Anfangs hieher setzen wollen, damit der Wißbegierige sogleich den Nutzen der Geometrie einsehen, und dieselben nach Bedürfniß anwenden könne.

Digitized by Google

Von dem Längenmaße.

70. Erkl. Um die Länge einer Linie auszumessen, muß wieder eine andere Linie als Grundmaß angenommen werden. Dieses ist der in jedem Lande angenommene Schuh oder Fuß, welcher fast überall in 12 Zoll, und der Zoll in 12 Linien abgetheilt wird. Theilt man die Linie noch einmal in 12 Theile, so erhält man Punkte, die aber nur bey den genauesten Rechnungen angewandt werden. Diese Eintheilung des Schuhmaßes wird das zwölftheilige Maß genannt; und weil man sich dieses Maßes in allen bürgerlichen Künsten und Handwerken bedienet, so nennt man es auch das gemeine Werkmaß. Außer diesem hat man noch die Klafter, welches eine Länge von 6 Schuh ist.

71. In der Geometrie oder Feldmeßkunst wird gewöhnlich der landesübliche Schuh in 10 Zoll, und der Zoll in 10 Linien eingetheilt; daher dieses Maß das geometrische oder zehntheilige genannt wird. Eine Länge von 10 Schuh gibt eine Ruthe, auf welche man aber selten mehr Rücksicht nimmt; indem man die Länge einer Linie größtentheils nur in Schuhen, Zollen und Linien ausdrückt.

72. Die Zeichen, deren man sich in der Geometrie bedienet, um die Ruthen, Schuhe und Zolle auszudrücken, sind für die Ruthen eine

Digitized by Google

kleine Null, für die Schuhe ein Strich, für die Zolle zwey Striche, und für die Linien drey Striche:

4 Ruthen, 3 Schuh, 7 Zoll, 4 Linien.
4° 3′ 7″ 4‴

Diese Zeichen sind zwar die nämlichen, wie bey den Graden, Minuten und Secunden; allein aus den Umständen kann sehr leicht verstanden werden, welches von beyden gemeint sey.

73. Das zehntheilige Maß ist eigentlich wegen seiner Bequemlichkeit im Rechnen von den Geometern eingeführt worden. Denn will man im zwölftheiligen Maße Schuhe zu Zolle machen, so muß mit 12 multiplicirt werden; beym zehntheiligen aber braucht man nur eine Null anzuhängen. Eben so ist es auch, wenn man Zolle zu Schuhen machen will, wo beym zwölftheiligen Maße mit 12 dividirt, beym zehntheiligen aber nur das letzte Ziffer abgeschnitten werden darf. Z. B.: Man soll 324″ zu Schuhen machen; so hat man 32′, 4″. Sollen 534‴ zu Schuhen gemacht werden; so hat man 5′, 3″, 4‴. Macht man entgegen 625′ zu Zoll, so hat man 6250″, und zu Linien, 62500‴.

74. Da sowohl der zwölftheilige, als der zehntheilige Schuh die nämliche Länge enthält, und diese nur in der Eintheilung der Zolle unter-

Digitized by Google

schieden sind; so geben 12 Zoll des zwölftheiligen Maßes 10 Zoll des zehntheiligen. Dadurch kann also leicht das zehntheilige in zwölftheiliges Maß, und umgekehrt, das zwölftheilige in zehntheiliges verwandelt werden. Z. B. wie viel zwölftheilige Zoll geben 8 zehntheilige?

Ansatz nach dem Kettensatze, oder der sogenannten Reesischen Regel:

x″ zwölfth.?	8″ zehnth.
10″ zehnth.	12″ zwölfth.

Antw. $9\frac{6}{10}$″ oder 9″, $7\frac{1}{5}$‴ zwölfth.

Ansatz nach der Regel Detri:

Zehnth.	Zwölfth.	Zehnth.?
10″	12″	8″

Antw. $9\frac{6}{10}$″ oder 9″, $7\frac{1}{5}$‴ zwölfth.

Die Rechnung zeigt, daß man nur die gegebene Zahl mit 12 multipliciren, und das Product durch 10 dividiren darf, wodurch der Ansatz erspart wird.

Sollen z. B. 7″ zwölftheiliges Maß in zehntheilige verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

x″ zehnth.?	7″ zwölfth.
12″ zwölfth.	10″ zehnth.

Antw. 5″, $8\frac{1}{5}$‴ zehnth.

Digitized by Google

Hieraus erhellet, daß, wenn zwölftheiliges Maß in zehntheiliges verwandelt werden soll, man bloß zur gegebenen Zahl eine Nulle hinzuthun, und mit 12 dividiren darf, wodurch wieder der obige Ansatz erspart wird.

75. Da man sowohl in Bau- als andern Geschäften öfters wissen möchte, wie viel eine gewisse Anzahl ausländischer Schuhe nach inländischem Maße enthalte; so hat man den Pariser-Fuß, weil er fast unter allen der größte ist, zum Grundmaße angenommen, und diesen in 14400 gleiche Theile zertheilt, wovon die übrigen eine gewisse Anzahl dieser Theile erhalten.

Der bayerische Fuß oder Schuh enthält von diesen Theilen 12938. Zieht man diese von den Theilen des Pariser-Fußes, das ist, 12938 von 14400 ab; so bleiben zum Reste noch 1462 solcher Theile übrig. Diese können durch folgende Rechnung in Zollen, Linien und Punkten gefunden werden:

x Zoll?	1462 Th.
12938 Th.	12 Zoll.

Antw. 1″, 4‴, 3⁗.

Nach der Regel Detri: 12938 Theile geben 12 Zoll, was geben 1462 Theile?

Digitized by Google

Dadurch ist man in den Stand gesetzt, einen Maßstab von Pariser-Fußen nach dem bayerischen zu verfertigen, wenn man zu demselben noch 1 Zoll, 4 Linien und 3 Punkte hinzusetzt. Das Nämliche kann bey jedem ausländischen Fußmaße geschehen, wenn man nur weiß, wie viele Theile derselbe von dem Pariser-Fuße enthält. Will man z. B. einen Maßstab im Wiener-Fußmaße verfertigen, welcher 14011 Theile enthält, so braucht man nur 12938 davon abzuziehen, und den Rest in bayerischen Zollen, Linien und Punkten zu suchen; wodurch man den Wiener-Fuß erhält.

76. Ist anstatt des bayerischen Fußes die Länge eines andern, z. B. des Augsburger-Fußes, gegeben; so kann wieder jeder andere beliebige, wovon aber die obigen Theile bekant seyn müssen, gefunden werden. Diese Theile nach dem Pariser-Fuße sind in besondern Tabellen vorhanden, wovon hier einige der vorzüglichsten folgen:

Amsterdamer	12570	Dresdner	12550
Ansbacher	13200	Florentiner Braccio	25800
Augsburger	13129	Frankfurter	12700
Bayerischer	12938	Französ. neue Mètre (lies Met'r)	44329
Berliner	13730	Königsberger	13640
Braunschweiger	12650	Leipziger	12520
Breslauer	12600	Londner	13511
Dänischer	14034		
Danziger	12751		

Digitized by Google

Mayländer Braccio	27600	Römischer Palmo	9903
Mannheimer	12865	Russischer	23860
Nürnberger	13470	Salzburger	13150
Pariser	14400	Schwedischer	13160
Rheinländischer	13913	Tyroler	14811
		Wiener	14011

Eine geographische Meile hält 25453 Münchner-Fuß. Eine bayerische Chaussée-Meile hält 25406 Münchner-Fuß.

77. Da der Pariser-Fuß 14400, und der bayerische 12938 Theile enthält; so geben 12938 Pariser-Fuß 14400 bayerische. Eben so geben auch 12938 rheinische Fuß 13913 bayerische. Hat man also eine gewisse Anzahl Fuße im rheinischen oder andern Maße; so können diese leicht in bayerische verwandelt werden. Z. B. wie viel geben 466 Pariser-Fuß im bayerischen Maße?

x′ Bayer.? 466′ Paris.

12938 Paris. 14400 Bayer.

Antw. $518\frac{43}{64}\frac{5}{69}\frac{8}{}'$.

Eben so kann man auch die Längenmaße von andern zwey Orten mit einander vergleichen. Z. B. wie viel machen 220 Wiener-Fuß im Augsburger-Fußmaße aus?

Da der Wiener-Fuß 14011, der Augsburger aber 13129 Theile enthält; so geben 13129 Wiener-Fuß 14011 Augsburger. Der Ansatz ist folgender:

Digitized by Google

x' Augsb.? 220 Wien.
13129 Wien. 14011 Augsb.

Antw. 234', 9".

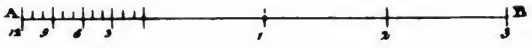
Nach der Regel Detri wird dieses eben so leicht zu berechnen seyn.

78. Wir haben oben gesehen, daß das neue französische Maß, Metre genannt, 44329 Theile eines Pariser-Fußes enthält, welche nach bayerischem Maß 3', 5", 1"', 4"" ausmachen. Dieses Maß wird in 10 Theile, die man Decimetres oder Zehntheile eines Metres; diese in 10 andere, die Centimetres oder Hunderttheile, und diese wieder in 10 andere, die man Millimetres oder Tausendtheile eines Metre nennt, eingetheilt. Trägt man die obigen 3', 5", 1"', 4"" von dem bayerischen Werkschuh auf einen Stab, und theilt diesen in 10 Theile, und jeden wieder in 10 andere; so hat man den neuen französischen Maßstab, Metre. Eine Länge von 10 Metren heißt ein Decametre, 100 Metres werden ein Hectometre, 1000 Metres ein Kilometre und 10000 Metres ein Myriametre genannt, welches letztere die Länge einer neuen französischen Meile ist. Man sieht hieraus, daß dieses neue Maß durchaus in Decimalen abgetheilt, und daher für die Berechnungen sehr bequem eingerichtet ist.

Digitized by Google

Von den verjüngten Maßstäben.

79. **Erklärung.** Will man eine gemessene Linie nach der Anzahl ihrer Schuhe und Zolle zu Papier bringen; so kann dieses natürlich nicht in der nämlichen Größe, wie sie der gemeine Werkschuh gibt, sondern durch ein kleineres oder verjüngtes Maß geschehen.



80. **Aufgabe.** Einen verjüngten Maßstab für das zwölftheilige Maß zu zeichnen.

Man ziehe eine Linie **A B**, theile sie in mehrere gleiche Theile, die man Schuhe gelten läßt, und einen dieser Theile wieder in 12 andere, welche die Zolle bedeuten.

81. **Aufgabe.** Einen verjüngten Maßstab zu zeichnen, wo der Schuh kleiner angenommen wird.

Man ziehe die Linie **C D**, theile von **C** bis **F** zwölf gleiche Theile, ziehe die senkrechte **C E** eben so hoch, als **C N**, dann die Parallellinie **E H**, und die Diagonallinie **G C**, so wird diese

Digitized by Google

die zwölf Theile so schneiden, daß jeder um einen gleichen Theil größer wird, als der andere. Es kann also **CN** einen Schuh, und **NO** einen Zoll, **XU** zwei Zoll u. s. w. bedeuten. Läßt man **CF** einen Schuh gelten, so gibt **CN** einen Zoll, und **NO** eine Linie.

Ist eine gemessene Linie nach der Anzahl ihrer Schuhe und Zolle gegeben, und man soll dieselbe nach einem der obigen verjüngten Maßstäbe zu Papier bringen, so macht man zuvor eine willkührlich lange Linie, nimmt die gegebene Anzahl von Schuhen und Zollen auf dem verjüngten Maßstabe, trägt sie auf die gezeichnete Linie, und bemerkt ihre Länge durch einen Punkt oder eine kleine Bogenlinie.

82. Will man eine auf das Papier gezeichnete Linie nach diesen Maßstäben messen; so braucht man sie nur im Zirkel zu fassen, und die Oeffnung auf den Maßstab zu setzen: so wird sich die Länge derselben in Schuhen und Zollen zeigen.

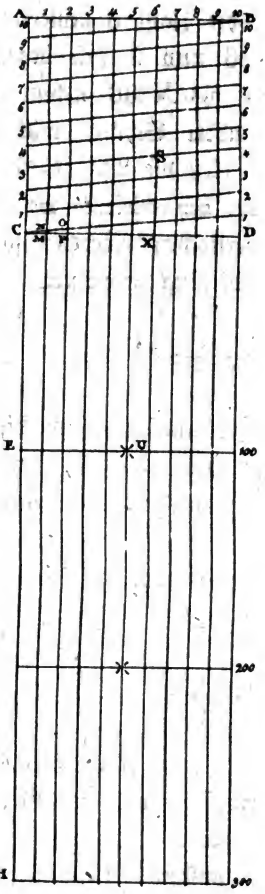
In den Bauplanen und andern Zeichnungen für technische Künste ist allemal der verjüngte Maßstab beygesetzt, wodurch man im Stande ist, die wirkliche Länge der Linien zu erfahren, und das Werk im Großen auszuarbeiten.

Man hat viele vortreffliche Werke ausländischer Meister, wo die verjüngten Maßstäbe

Digitized by Google

nach dem gewöhnlichen Maße ihres Wohnortes beygesetzt sind. Um also die wahre Länge der Linien nach dem landesüblichen Werkschuhe zu finden, muß man zuvor die oben angezeigten Verhältnisse wissen. Wir haben gesehen, daß der bayerische Werkschuh um 1″, 4‴, 3⁗ kürzer ist, als der Pariser-Fuß; will man also in einem Bauplane eines französischen Meisters, wo der Pariser Fuß als Grundmaß angenommen ist, die Länge der Linien nach bayerischem Maße wissen, so muß bey jedem Schuh 1″, 4‴, 3⁗, zugegeben werden. Da aber dieses ein beständiges Rechnen verursachen, und die Arbeit verzögern würde; so ist es am bequemsten, wenn man 9 französische Fuß in 10 Theile zertheilt, wovon jeder hinlänglich genau einen bayerischen Schuh ausmachen wird. Auf diesem Maßstabe können nun alle Linien abgenommen, und ihre Länge nach bayerischem Maße auf der Stelle gefunden werden. Eine Pforte eines öffentlichen Gebäudes, welche im französischen Maße 9′ Breite, und 18′ Höhe hält, hat nach bayerischem 10′ Breite, und 20′ Höhe, welches schon einen beträchtlichen Unterschied verursacht. Bey Werken anderer ausländischer Meister kann man auf eine ähnliche Weise verfahren.

83. Aufgabe. **Den gewöhnlichen verjüngten Maßstab für das zehntheilige Maß zu zeichnen.**



Man theilt eine Linie **A H** von **A** bis **C** in 10 gleiche Theile, zieht **A B** senkrecht auf **AH**, theilet **A B** ebenfalls in 10 Theile nach beliebiger Größe, und macht die Theile von **B D** gleich denen von **A C**; zieht dann die Quer- oder Transversallinien **C 1, 1 2, 2 3** ꝛc. Die Länge **A C** trage man abwärts ungefähr 5 mal, und setze die Zahlen, wie die Figur zeigt.

Läßt man nun die Weite **D 1** einen Schuh gelten; so gibt **D B** 10 Schuh, und **MN** einen Zoll. Läßt man **D 1** zehn Schuh gelten; so gilt **MN** einen Schuh, **OP** zwey Schuh u. s. w. Gilt **D 1** zehn Schuh, und man will z. B. 36 Schuh abnehmen; so suche man auf **A C** die

Zahl 3, fahre auf der Querlinie aufwärts, bis man auf der Linie **AB** die Zahl 6 bemerkt; wo die geraden Linien von 6 und 3 sich begegnen, ist der Punkt **S**, welcher bis **X** 36 Schuh gibt. Die Linie **CE** hält hundert Schuh; will man also 136 Schuh, so gibt dieß die Linie **US**.

Da diese Maßstäbe bey vielem Gebrauche auf dem Papiere sehr verstochen werden; so hat man sie gewöhnlich auf Messing gezeichnet.

Von den Grundsätzen.

84. **Erklärung.** Grundsätze sind diejenigen, deren Wahrheit für sich klar ist, und die folglich keines Beweises bedürfen. Hier sind die gewöhnlichsten:

1. Das Ganze ist größer, als ein Theil desselben.

2. Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

3. Wenn Gleiches mit Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt wird, so bleibt die Gleichheit; eben so auch, wenn Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder dividirt wird.

4. Gleiches kann anstatt Gleichen gesetzt werden.

5. Winkel und Flächen, die sich einander vollkommen decken, sind einander gleich und ähnlich (congruent).

Digitized by Google

85. **Anmerkung.** Zwey Flächen können ihrem Inhalte nach gleich seyn; ohne daß sie einander ähnlich sind; denn ein Quadrat kann die nämliche Flächen-Größe enthalten, wie ein länglichtes Viereck, oder auch wie ein Dreyeck. Gleich und ähnlich sind sie nur dann, wenn sie einander vollkommen decken. Daher congruente Figuren immer von einerley Gattung seyn müssen; weil Dreyecke nie Vierecke, und diese nie Vielecke decken können, wozu eine vollkommene Gleichheit der Linien und Winkel erfordert wird. Aehnlich sind sie, wenn nur die Winkel einander gleich sind, und die gleichnamigen Linien mit einander im Verhältnisse stehen. Zwey Quadrate, zwey Kreise und zwey gleichseitige Dreyecke, wenn ihre Größe verschieden ist, sind einander ähnlich. Weiter unten wird man die Aehnlichkeit der Figuren deutlicher aus einander setzen.

Zeichen, die in der Geometrie gebraucht werden.

86. Verschiedene Dinge werden in der Geometrie größtentheis nur mit Zeichen angesetzt.

= das Zeichen der Gleichheit.

∽ das Zeichen der Aehnlichkeit.

≅ das Zeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit (Congruenz).

\+ das Zeichen der Addition.

Digitized by Google

— Das Zeichen der Subtraction.

× oder ein Punkt (.) das Zeichen der Multiplication.

: oder ein Strich zwischen zwey Zahlen ($\frac{a}{b}$) das Zeichen der Division.

AB^2 bedeutet das Quadrat von AB.

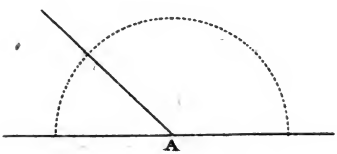
AB^3 bedeutet den Kubus oder Würfel von AB.

$\sqrt[2]{}$ oder $\sqrt{}$ zeigt die Quadratwurzel an.

$\sqrt[3]{}$ zeigt die Kubikwurzel an.

Die nöthigsten Lehrsätze.

87. Erklärung. Ein Lehrsatz ist derjenige, dessen Wahrheit erst durch Schlüsse dargethan werden muß. Sätze, welche aus den Grund- und Lehrsätzen folgen, nennt man Zusätze.



88. Lehrsatz. Die Nebenwinkel halten zusammen 180°, und sind gleich zwey rechten.

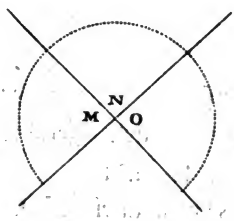
Beweis. Setzt man den Zirkel in den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt A; so kann ein halber Kreisbogen um selbe gezogen werden, welcher 180° hält.

Digitized by Google

89. Zusatz. Wenn also von den beyden Nebenwinkeln Einer bekannt ist; so ist es auch der andere; denn er ist der Rest von 180°. Ist Einer aufgezeichnet, so bleibt der andere von sich selbst übrig.

90. Zusatz. Ist Ein Nebenwinkel ein rechter, so ist es auch der andere, weil der Rest 90° gibt.

91. Anmerkung. Der Ergänzungswinkel zu 90° wird in der Geometrie Complementswinkel oder das Complement; der Ergänzungswinkel zu 180° aber das Supplement genannt.

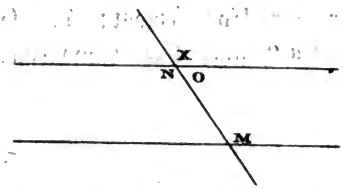


92. Lehrsatz. Die Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Der Winkel **M** hat mit **N** den haben Kreisbogen zum Maße, und **O** mit **N** ebenfalls. Nimmt man also von beyden Gleiches, nämlich **N**, hinweg, welches nach dem dritten Grundsatze ohne Schaden der Gleichheit geschehen kann; so bleibt der Winkel **M** gleich dem Winkel **O**.

Digitized by Google

93. Zusatz. Ist von den vier Verticalwinkeln nur Einer gegeben; so sind auch alle übrigen schon bekannt. Denn gibt man z. B. den Winkel **A**; so ist **B** als sein Nebenwinkel, und **C** und **D** als ihre beyden Verticalwinkel bekannt.



94. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind:

1. die Wechselwinkel **M** und **N** einander gleich;

2. der äußere Winkel **X** ist dem innern **M** gleich;

3. die beyden innern Winkel **O** und **M** halten zusammen 180°.

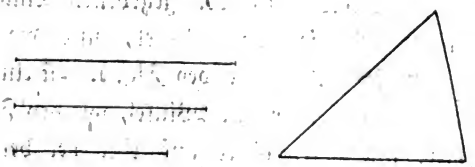
Beweis. Die Parallellinien behalten mit der durchschneidenden Linie die nämliche Lage bey, sie mögen weit oder nahe beysammen stehen. Rückt man sie nun immer näher gegen einander, so werden sich endlich sowohl die Linien, als Win-

Digitized by Google

kel decken. Es ist also 1. **M**=**N**, weil sie beym Aufeinanderlegen Verticalwinkel bilden. 2. Setzt man anstatt **N** das gleiche **M**, so ist auch **X**=**M**. 3. Da **X** und **O** als Nebenwinkel 180° halten, und man wegen Gleichheit anstatt des Winkels **X** den Winkel **M** setzen kann; so halten auch **M** und **O** zusammen 180°.

95. Zusatz. Linien, von welchen die obigen drey Fälle erwiesen werden können, sind also auch parallel.

Hierin liegt die Ursache von der oben, Seite 18. Nro. 43 angeführten Auflösung der Aufgabe, Parallellinien zu ziehen, wo bey **A** und **B** Wechselwinkel vorkommen.

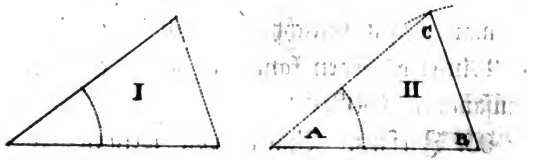


96. Lehrsatz. Wenn in einem Dreiecke die drey Seiten bekannt sind, so sind es auch die drey Winkel; und das Dreyeck ist vollkommen bekannt.

Beweis. Setzt man die Linien zusammen, so bestimmen sich die Winkel von sich selbst, und das Dreyeck bleibt immer das nämliche, man mag den Linien eine Lage geben, welche man will.

Digitized by Google

97. Zusatz. Zwey Dreyecke, welche durchaus gleiche Seiten haben, sind also auch einander gleich und ähnlich (congruent).

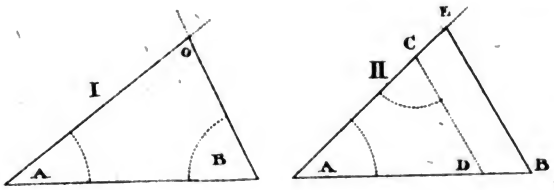


98. Lehrsatz. Wenn zwey Seiten und ein Winkel bekannt sind; so ist ebenfalls das ganze Dreyeck bestimmt.

Beweis. Sind die zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und man verbindet die Endespunkte der gegebenen Linien; so bestimmen sich die zwey Winkel, und die dritte Seite von sich selbst, wie bey Fig. I. Ist ein anderer, als der eingeschlossene Winkel, wie bey Fig. II. gegeben, und wird dieser auf eine der bekannten Linien, hier auf **AB** bey **A**, gesetzt, und die Linie **AC** unbestimmt verlängert: so wird die zweyte bekannte Linie **BC** dieselbe in einem bestimmten Punkte **C** durchschneiden, oder berühren, wodurch wieder die drey Winkel und Seiten bekannt werden.

99. Zusatz. Zwey Dreyecke, in welchen zwey Seiten und ein Winkel in Einem gleich sind zweyen Seiten und einem Winkel im andern Dreyecke, sind vollkommen einander gleich und ähnlich (congruent).

Digitized by Google

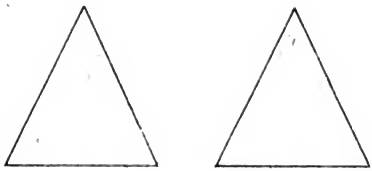


100. Lehrſatz. Iſt in einem Dreyecke nur Eine Seite und zwey Winkel gegeben; ſo iſt wieder das ganze Dreyeck bekannt.

Beweis. Fig. I. Liegen die beyden Winkel **A** und **B** auf der bekannten Seite **AB**; ſo wird ſich der dritte Winkel, und die Länge der beyden Seiten durch die Verlängerung der beyden Schenkel, die ſich in einem beſtimmten Punkte **O** durchſchneiden werden, von ſich ſelbſt bilden. Liegt von den zwey bekannten Winkeln Fig. II. nur Einer auf der bekannten Seite **AB**, hier der Winkel **A**; ſo wird der andere auf einen willkührlichen Punkt der unbekannten Seite **AC** geſetzt, und der Schenkel **CD** gezogen, welcher die Linie **AB** in **D** ſchneidet. Wird nun aus dem Punkte **B** eine Parallellinie mit **DC** gemacht; ſo beſtimmt dieſe wieder das ganze Dreyeck **AEB**.

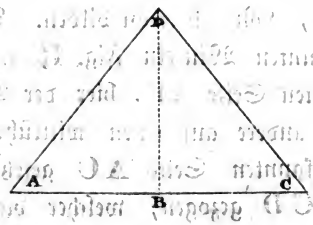
101. Zuſatz. Wenn alſo eine Seite und zwey Winkel in einem Dreyecke gleich ſind einer Seite und zweyen Winkeln in einem andern Dreyecke; ſo ſind auch beyde Dreyecke einander gleich und ähnlich.

Digitized by Google



102. Lehrsatz. In gleichen und ähnlichen Dreyecken stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten, und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. Legt man die gleichen Seiten zusammen, so werden sich die gleichen Winkel einander decken; und legt man die gleichen Winkel zusammen, so geschieht dieß mit den gleichen Seiten.



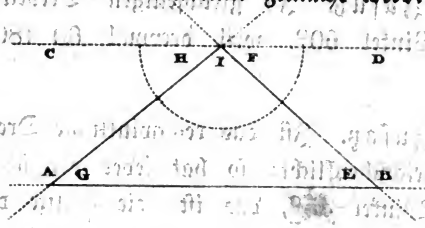
103. Lehrsatz. In dem gleichschenklichten Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, **A** = **C**.

Beweis. Theilt man die Grundlinie in zwey gleiche Theile, und zieht aus dem gegenüber stehenden Winkel eine Linie auf den Theilungspunkt; so erhält man zwey Dreyecke, wo **AB** = **BC** wegen der gleichen Abtheilung, **AD** =

Digitized by Google

CD wegen der gleichen Schenkel, und BD = BD, das ist, beyden gemein ist. Es sind also auch nach S. 48. Nro. 97. die drey Winkel einander gleich, und beym Aufeinanderlegen wird der Winkel A den Winkel C decken.

104. Zusatz. In dem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel einander gleich; weil dasselbe auch gleichschenklicht ist, und alle drey Winkel durch Verwendung des Dreyeckes zu Winkeln an der Grundlinie gemacht werden können.



105. Lehrsatz. Die drey Winkel in einem Dreyecke halten zusammen 180°.

Beweis. Man verlängere alle drey Seiten des Dreyeckes, und ziehe mit der Grundlinie AB an der Spitze des obern Winkels eine Parallellinie CD; so werden diese beyden Parallelen durch EI und GI durchschnitten, und bilden bey E und F, G und H Wechselwinkel, welche, wie wir oben erwiesen haben, einander gleich sind. Man kann also anstatt des Winkels E den Winkel F, und anstatt G den Winkel H setzen. Da sich nun aus der Spitze I ein hal-

der Kreisbogen um alle drey Winkel beschreiben läßt, welcher 180° hält; so ist es klar, daß die drey Winkel zusammen 180° ausmachen.

106. Zusatz. In einem Dreyecke können also niemals zwey rechte, oder zwey stumpfe Winkel seyn, weil diese schon 180°, oder darüber ausmachen, und also für den dritten Winkel nichts mehr übrig bleiben würde.

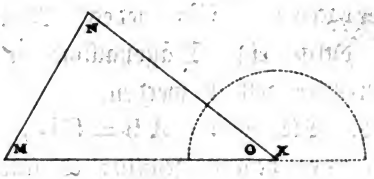
107. Zusatz. In gleichseitigen Dreyecken hält ein Winkel 60°, weil dreymal 60 180° geben.

108. Zusatz. Ist das rechtwinklichte Dreyeck auch gleichschenklicht; so hat jeder der übrigen zwey Winkel 45°, das ist, die Hälfte des rechten Winkels, weil 90° und zweymal 45° zusammen 180° ausmachen.

109. Zusatz. In dem gleichschenklichten Dreyecke sind alle drey Winkel bekannt, wenn Einer bekannt ist. Denn ist es der an der Spitze; so sind die beyden an der Grundlinie der Rest von 180°. Ist einer an der Grundlinie bekannt; so nimmt man ihn doppelt, und zieht beyde von 180° ab, wodurch man den Winkel an der Spitze erhält. Ist also in dem gleichschenklichten Dreyecke Eine Seite und Ein Winkel gegeben; so bilden sich die übrigen Seiten und Winkel beym Aufzeichnen von sich selbst.

Digitized by Google

110. Zusatz. Da sich ein jedes Viereck durch eine Diagonallinie in zwey Dreyecke zertheilen läßt, wovon die Winkel eines jeden 180° halten; so sind die 4 Winkel eines Viereckes gleich 360°. Trägt man also die Winkel eines Viereckes um einen gemeinschaftlichen Punkt; so nehmen sie einen ganzen Kreisbogen, und die eines Dreyeckes einen halben Kreisbogen ein.



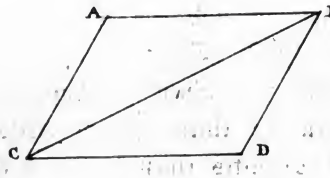
111. Lehrsatz. Der äußere Winkel, welcher in einem Dreyecke durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist gleich den zwey innern entgegengesetzten, $X = M + N$.

Beweis. Der Winkel **O** hält mit **M** und **N** 180°, als die drey Winkel eines Dreyeckes; es hält aber auch **O** mit **X** 180° als Nebenwinkel: folglich muß **X** so groß seyn, als **M** und **N** zusammen genommen; weil der Winkel **O** überall abgezogen werden kann.

112. Zusatz. Ist der äußere Winkel eines gleichschenklichten Dreyeckes gegeben, so sind wieder alle drey Winkel desselben bekannt, weil entweder einer an der Grundlinie, oder der an der Spitze als Nebenwinkel bekannt wird, und

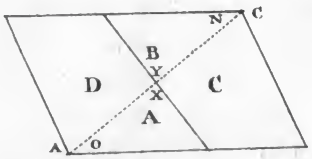
Digitized by Google

die übrigen durch Subtraction von 180° zum Vorschein kommen.



113. Lehrsatz. Ein jedes Parallellogramm kann durch eine Diagonallinie in zwey congruente Dreyecke getheilt werden.

Beweis. Die Linie **AB = CD**, **AC = BD**, und **BC** beyden gemein; es sind also auch die drey Winkel einander gleich; folglich das Dreyeck **ACB ≅ BCD**.

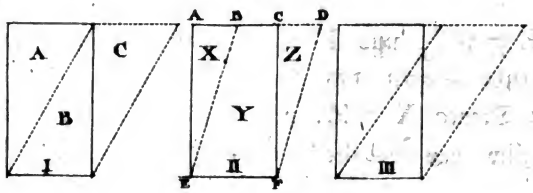


114. Lehrsatz. Wenn in einem Parallellogramme eine Linie, wie immer, durch den Mittelpunkt der Diagonallinie gezogen wird, so theilt dieselbe das Parallellogramm in zwey gleiche Theile.

Beweis. Das Dreyeck **A** ist gleich dem Dreyecke **B**, weil die Verticalwinkel **X = Y**, die Wechselwinkel **O = N**, und die Seite **AX = YC**; folglich zwey Winkel und eine Seite

Digitized by Google

einander gleich sind. Es ist ferner $A + C = B + D$. Nimmt man die gleichen Theile **A** und **B** hinweg, welches nach dem dritten Grundsatze, Seite 42, ohne Verletzung der Gleichheit geschehen kann, so ist $C = D$. Wird nun zu **C** das Dreyeck **B**, und zu **D** das Dreyeck **A** hinzu gethan; so erscheint $A + D = B + C$.

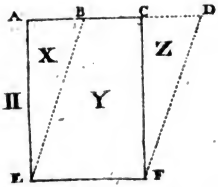


115. Lehrsatz. Parallellogramme von einerley Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

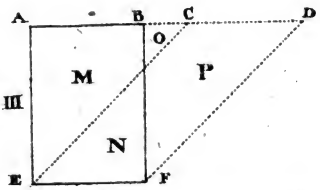
Beweis. Es können hier dreyerley Fälle vorkommen, wie die Figuren I. II. III. zeigen, wo überall die Parallellogramme anders verschoben sind.

Bey der Fig. I. ist das Dreyeck $A = B$, und $B = C$ wegen der Diagonallinien, welche die Parallellogramme in zwey gleiche Dreyecke zertheilen; es ist also auch $A = C$, daher $A + B = B + C$.

In der Fig. II. ist $AC = EF$, und $BD = EF$, als gegenüber stehende Seite eines Parallellogramms: es ist also auch $BD = AC$. Nimmt man von beyden Gleiches, nämlich BC

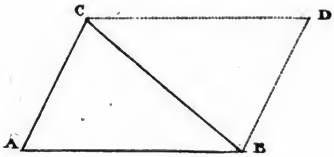


hinweg; so bleibt **AB = CD**. Da nun auch **AE = CF**, und **EB = FD** ist, als gegenüber stehende Seiten des Parallellogramms; so ist das Dreyeck **X = Z**, und **X + Y = Y + Z**; folglich das Parallellogramm **AEFC = BEFD**.

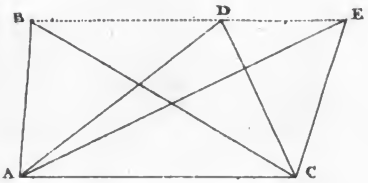


In der Fig. **III.** ist wieder aus den obigen Ursachen **EF = CD**, und **CD = AB**. Setzt man zu **AB** und **CD** überall Gleiches, nämlich **BC** hinzu; so ist **AC = BD**. Da nun auch **AE = BF**, und **EC = FD** ist; so sind die Dreyecke **AEC** und **BFD** einander gleich. Nimmt man von beyden das Dreyeck **O** hinweg, und setzt zu jedem das Dreyeck **N** hinzu, welches ohne Schaden der Gleichheit geschehen kann; so ist **M + N = P + N**, und also das Parallelogramm **AEFB = ECDF**.

Digitized by Google

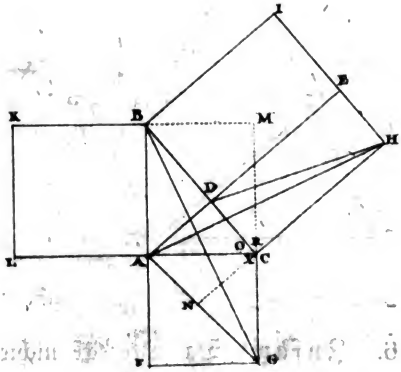


116. Zusatz. Da Dreyecke nichts anders, als Hälften von Parallellogrammen sind, indem jedes zu einem Parallellogramme ergänzt werden kann; so sind auch Dreyecke von einerley Grundlinie und Höhe einander gleich. Es ist demnach das Dreyeck **ABC = CBD.**



117. Zusatz. Weil Dreyecke zwischen Parallelen allemal eine gleiche Höhe haben, so sind alle Dreyecke zwischen denselben, wenn sie auf gleichen Grundlinien stehen, einander gleich; daher **ABC = ADC = AEC.** Die Anwendung dieser Zusätze wird gleich in dem Beweise des folgenden Lehrsatzes vorkommen.

Digitized by Google



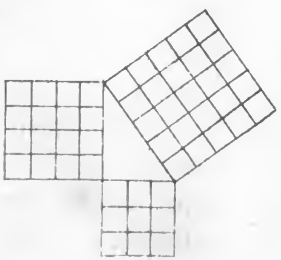
118. **Lehrsatz.** In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

Beweis. Man mache mit jeder Seite des Dreyeckes **ABC** ein Quadrat, fälle aus der Spitze **A** senkrecht auf **BC** die Linie **AD**, und verlängere sie bis **E**; so kann erwiesen werden, daß das Quadrat **AFGC** gleich ist dem Rechtecke **DCHE**.

Man ziehe die Linien **BG** und **AG**, dann **AH** und **DH**; so ist das Dreyeck **BGC** = **AGC** wegen einerley Grundlinie **CG** und Höhe **AC** = **BM**. Ferner ist **AHC** = **DHC**, weil wieder gleiche Grundlinien **CH** und Höhen **DC** = **AN** vorhanden sind. Nun ist aber das stumpfwinklichte Dreyeck **BGC** = **AHC**; denn **X** = **R**, als rechte Winkel, und **O** ist beyden

Dreyecken gemein, folglich der ſtumpfe Winkel **O + X = O + R**, und die Seiten **CH = CB** und **CG = CA**, als Seiten des nämlichen Quadrates; es ſind alſo zwey Seiten und ein Winkel in beyden Dreyecken einander gleich; folglich die Dreyecke gleich und ähnlich; daher müſſen auch die mit ihnen gleichen Dreyecke **AGC** und **DCH** einander gleich ſeyn. Da nun die einen Hälften dieſer Parallellogramme einander gleich ſind; ſo ſind es auch die andern, weil ſie durch die Diagonallinien **AG** und **DH** in zwey gleiche Theile abgetheilt werden; folglich **AFGC = CDEH**.

Der Beweis von der Gleichheit der übrigen zwey Parallellogramme **ABKL**, und **BDEI**, iſt ganz der nämliche. Es iſt alſo das Quadrat **AFGC** gleich dem länglichten Vierecke **CDEH**, und **BDEI** gleich **BALK**, folglich beyde Quadrate zuſammen gleich dem Quadrate der Hypotenuſe.



119. Zuſatz. Setzt man auf eine Lothlinie des rechten Winkels 3 gleiche Theile, auf die an-

Digitized by Google

dere 4, und zieht die Hypotenuse; so erhält diese genau 5 solcher Theile. Zeichnet man die Quadrate wirklich; so hat man auf der Hypotenuse 25 Quadrate, auf einer Lothlinie aber 9, und auf der andern 16, welche zusammen ebenfalls 25 geben. So oft man also drey Linien zusammen setzt, wovon eine 3 Theile, die andere 4, und die dritte 5 solcher Theile hält; so entsteht der längsten Seite gegenüber ein rechter Winkel. Eben dieses geschieht auch, wenn man diese drey Zahlen mit was immer für einer andern Zahl multiplicirt, z. B. mit 4, wodurch 12, 16 und 20 entstehen, die bey der Zusammensetzung ebenfalls den rechten Winkel geben.

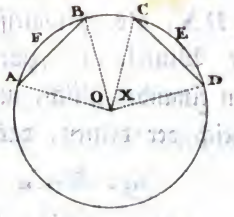
120. Zusatz. Das Quadrat eines Katheten ist so groß, als das Quadrat der Hypotenuse, weniger dem Quadrate des andern Katheten. Sind also in einem rechtwinklichten Dreyecke zwey Linien gegeben; so kann die dritte durch Rechnung gefunden werden. Nimmt man z. B. die beyden Katheten als bekannt an; so werden diese durch die Multiplication mit sich selbst zum Quadrate erhoben, und die beyden Quadrate zusammen addirt, welche dann das Quadrat der Hypotenuse ausmachen, aus dem, um die eigentliche Länge der Hypotenuse zu erhalten, die Quadratwurzel ausgezogen werden muß.

Digitized by Google

Anmerkung. Der angeführte Lehrsatz heißt von seinem Erfinder **Pythagoras** der pythagorische Lehrsatz.

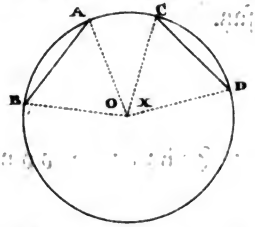
Die nöthigsten Lehrsätze vom Kreise.

121. **Lehrsatz.** Wenn in einem und dem nämlichen Kreise zwey Sehnen einander gleich sind: so sind es auch die dadurch abgeschnittenen Bogen, und umgekehrt, wenn die Bogen einander gleich sind, so sind es auch die Sehnen.

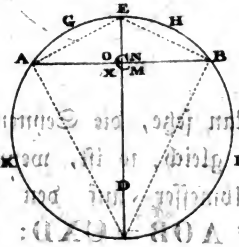


Beweis. Man setze, die Sehnen **AB** und **CD** seyen einander gleich, so ist, wenn man von denselben die Halbmesser auf den Mittelpunkt zieht, das Dreyeck **AOB = CXD**; weil außer den Seiten **AB** und **CD** auch die Halbmesser, welche die Dreyecke bilden, alle einander gleich sind. Da die Seiten einander gleich sind; so sind es auch die Winkel, folglich der Winkel

$X = O$, also auch das Maß dieser Winkel, nämlich die Bogen $AFB = CED$.



Sind die Bogen einander gleich, so sind es auch die Sehnen; denn zieht man wieder die Halbmesser, und verbindet die Endespunkte der Bogen mit Sehnen; so sind die Winkel O und X einander gleich, weil sie gleiche Bogen zum Maßstabe haben. Eben so auch $AO = CX$, und $BO = DX$, als Halbmesser: folglich der eingeschlossene Winkel und zwey Seiten in beyden Dreyecken einander gleich, und also auch die dritte Seite gleich der dritten, das ist, $AB = CD$.



122. Lehrsatz. Wenn eine Sehne AB durch eine senkrechte EC in zwey gleiche Theile getheilt, und gehörig verlängert wird; so

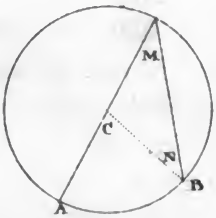
geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises, und wird dadurch zum Durchmesser.

Beweis. Man verbinde die Sehne **AB** und die senkrechte **ED** mit andern Sehnen, wie die Figur zeigt; so wird vorausgesetzt, daß **AB** in zwey gleiche Theile getheilt, und **ECD** senkrecht auf **AB** sey. Es ist demnach der Winkel **O = N**, die Seite **AC = CB**, und **EC = EC**, oder beyden gemein; und daher beyde Dreyecke gleich und ähnlich; weil sie zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel mit einander gleich haben. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Dreyecken **ACD** und **BCD**, wo **AC = BC**, **CD = CD**; und **X = M**; also auch diese zwey Dreyecke congruent sind. Da nun die Sehnen **AE = EB**, und **AD = BD**, so sind auch ihre gegenüber stehenden Bogen einander gleich; folglich **AGE = EHB**, und **AKD = BID**, also zusammen **EGAKD = EHBID**. Die Linie **ED** theilt folglich den Kreis in zwey gleiche Theile und wird zum Durchmesser, das heißt: sie geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

123. **Zusatz.** Jeder Durchmesser, der eine Sehne senkrecht durchschneidet, theilt sowohl diese, als den Bogen in zwey gleiche Theile.

Auf diesem Lehrsatze beruhen die Auflösungen der obigen Aufgaben: den Mittelpunkt eines

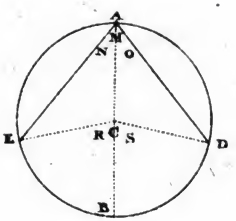
Kreiſes oder eines Bogens zu finden; durch drey gegebene Punkte, und um ein Dreyeck einen Kreis zu beſchreiben.



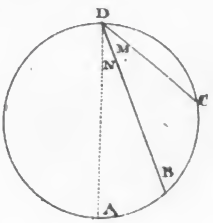
124. Lehrſatz. Die Winkel an der Peripherie, wie M, haben den halben Bogen zum Maße, den ihre verlängerten Schenkel abſchneiden.

Beweis. Hier können dreyerley Fälle vorkommen: der erſte iſt, wenn ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht; der zweyte, wenn ſich der Mittelpunkt zwiſchen den beyden Schenkeln befindet; und der dritte, wenn beyde Schenkel außer dem Mittelpunkte fallen.

Im erſten Falle iſt der Winkel C, wenn man den Halbmeſſer CB zieht, als äußerer Winkel eben ſo groß, als die zwey innern M und N zuſammen genommen. Da aber das Dreyeck CMN wegen der beyden Halbmeſſer CM und CN gleichſchenklicht iſt; ſo iſt der Winkel M=N, und alſo M halb ſo groß, als C. Es hat aber C den ganzen Bogen AB zu ſeinem Maße, daher M die Hälfte desſelben haben muß.

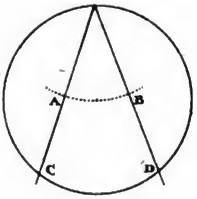


Im zweyten Falle ziehe man die Linie **AB** durch den Mittelpunkt, und verbinde die Sehnen mit den Linien **CD** und **CE**, so hat man den obigen Fall doppelt. Denn es ist **S** noch so groß, als **O**, und **R** noch so groß, als **N**; folglich der ganze Winkel **M** nur die Hälfte des ganzen Winkels **C**, und das Maß von **M** der halbe Bogen **EBD**.



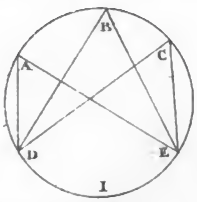
Im dritten Falle ziehe man wieder aus dem Scheitel durch den Mittelpunkt eine Linie **DA**; so haben nach obigen Beweisen die beyden Winkel **M** und **N** zusammen den halben Bogen **ABC**. Läßt man den Winkel **N** hinweg, folglich auch den Bogen **AB**; so bleibt für den Winkel **M** die Hälfte des Bogens **BC**.

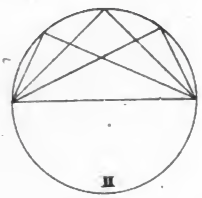
Digitized by Google



125. Zusatz. Zieht man mit dem Halbmesser des Kreises aus dem Scheitelpunkte eines Winkels an der Peripherie einen Bogen **AB**; so ist dieser das eigentliche Maß dieses Winkels, und die Hälfte des Bogens **CD**.

126. Zusatz. Der Winkel am Mittelpunkte, den man auch Centriwinkel nennt, ist also noch so groß, als der Winkel an der Peripherie, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.





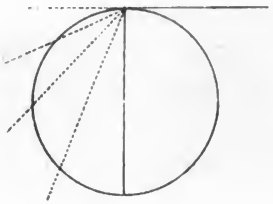
127. Zusatz. Alle Winkel an der Peripherie, welche auf einerley Bogen stehen, sind einander gleich; es ist also $A = B = C$, weil alle den halben Bogen **DE** zum Maße haben. Fig. **I.**

128. Zusatz. Stehen die Winkel auf dem Durchmesser; so sind sie lauter rechte; weil sie

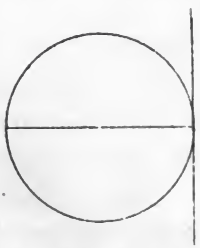
Digitized by Google

die Hälfte des halben Kreisbogens, das ist, 90° zum Maße haben. Fig. II.

Dieß ist der Grund der Auflösungen der obigen Aufgaben: einen rechten Winkel am Ende einer Linie zu errichten, und ein Winkelmaß zur prüfen.



129. Zusatz. Da einer von den beyden Schenkeln sich an der Peripherie immer weiter von dem andern entfernen kann, bis er endlich, wenn man ihn rückwärts verlängert, zur Tangente wird; so hat auch der Winkel, den eine Sehne mit der Tangente bildet, den halben Bogen, welcher zwischen den beyden Schenkeln liegt, zum Maße.

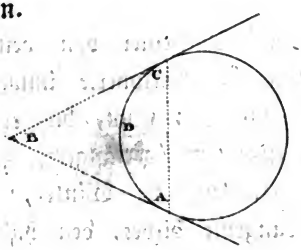


130. Zusatz. Es ist also der Winkel, den der Durchmesser mit einer Tangente macht, ein rechter Winkel, weil er die Hälfte des halben

Digitized by Google

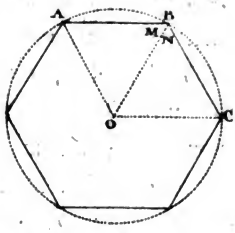
Kreisbogens, das ist, 90° zum Maße hat. Jeder Durchmesser, und auch jeder Halbmesser, weil er zum Durchmesser verlängert werden kann, steht daher senkrecht auf seiner Tangente. Fällt man aus dem Mittelpunkte eine senkrechte auf die Tangente; so geht diese durch den eigentlichen Berührungspunkt derselben.

Hierauf gründen sich die Auflösungen der Aufgaben: eine richtige Tangente zu ziehen; den Berührungspunkt der Tangente zu finden; einen Kreis in einen Winkel, und in ein Dreyeck zu beschreiben.



131. Zusatz. Wenn zwey Tangenten durch Verlängerung in einem Winkel zusammen stoßen; so haben sie von dem Berührungspunkte bis an den Scheitelpunkt gleiche Länge: **AB** ist gleich **CB**. Denn wenn man die beyden Berührungspunkte mit einer Sehne verbindet, so hat der Winkel **A** den halben Bogen **ADC**, und der Winkel **C** den nämlichen halben Bogen **CDA** zum Maße; folglich ist **A = C**, und das Dreyeck gleichschenklicht.

Digitized by Google



132. Lehrsatz. Wenn aus dem Mittelpunkte eines um ein regelmäßiges Vieleck beschriebenen Kreises die Halbmesser in die Winkel des Vieleckes, die man hier Polygonwinkel nennt, gezogen werden; so entstehen lauter gleiche Dreyecke, und die Polygonwinkel werden in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis. Die Seite **AB = BC**, als Seiten eines regelmäßigen Vieleckes; die Halbmesser **AO**, **OB** und **OC** sind ebenfalls einander gleich; folglich die Dreyecke congruent, und der Winkel **M = N**; und also der Polygonwinkel in zwey gleiche Theile getheilt.

133. Zusatz. Theilt man daher ein Paar Polygonwinkel in zwey gleiche Theile, und verlängert die Theilungslinien, bis sie sich einander durchschneiden; so hat man den Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes.

134. Zusatz. Da das regelmäßige Vieleck eben so viele Winkel am Mittelpunkte, als Seiten hat; so kann die Anzahl der Grade eines solchen Winkels gefunden werden, wenn man den

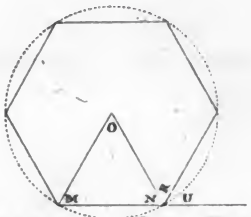
Digitized by Google

ganzen Umkreis, nämlich 360°, mit der Anzahl der Seiten dividirt. Will man z. B. ein Fünfeck; so muß 360 mit 5 dividirt werden, wo man 72° als den Winkel am Mittelpunkte erhält, welchen man mit dem Transporteur auftragen kann. Beym Auftragen dieses Winkels mache man zuvor einen Kreis mit dem nämlichen Halbmesser, womit auf dem Transporteur der Kreis gezeichnet ist, und trage die 72° von dem Transporteur auf denselben; so wird dieser dadurch genau in 5 gleiche Theile getheilt werden.

135. Anmerkung. Da bey manchen Vielecken außer den Graden in der Berechnung auch noch Minuten vorkommen, und der Transporteur nur in Grade eingetheilt ist; so kann man von diesem Verfahren nur selten Gebrauch machen. Man bedient sich daher in der Mechanik, wo die Theilungen der Kreise am meisten vorkommen, viel bequemer und sicherer der Unterabtheilungen, wie wir bereits bey der Zeichnung der regelmäßigen Vielecke gezeigt haben. Die Eintheilung in ungleiche Theile vermeidet man so viel als möglich, und bedient sich ihrer nur selten bey Getrieben, wo nur eine kleine Anzahl von Theilen nöthig ist, nie aber bey Kamm- und Stirnrädern. Wollte man auch den Winkel nach Graden und Minuten durch einen richtigen Sehnen-Maßstab noch so genau auftragen; so würden die Theile wegen der ungewissen Zirkelum-

Digitized by Google

schläge und des ungleichen Materials am Ende doch nicht eintreffen; daher die obige Art mit Unterabtheilungen, und bey wenigen ungleichen Theilen mit Zirkelversuchen, für die gewöhnlichen Fälle die bequemste und die anwendbarste ist.



136. Lehrsatz. Der Polygonwinkel ist gleich 180° weniger dem Winkel am Mittelpunkte, $N+R=180°-O$.

Beweis. Die drey Winkel M, N, O halten zusammen 180°; es ist aber nach dem vorigen Lehrsatze $M=N=R$; man kann also anstatt M den Winkel R setzen; folglich halten N, R und O zusammen ebenfalls 180°, und $N+R=180°-O$.

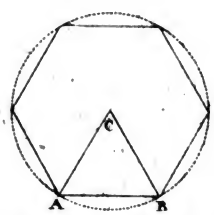
137. Zusatz. Verlängert man eine Seite des regelmäßigen Vieleckes; so ist U der Nebenwinkel des Polygonwinkels $N+R$, und also auch $U=O$.

Hierauf gründet sich die Auflösung der Aufgabe: über eine gegebene Linie ein regelmäßiges Vieleck, von was immer für einer Anzahl von Seiten zu beschreiben, wo man den Winkel am

Digitized by Google

Mittelpunkte als Nebenwinkel entweder durch den Transporteur, oder durch Abtheilung eines willkührlichen Kreises in die verlangten Theile, auftragen kann.

Man hat zwar für dergleichen Aufgaben noch verschiedene geometrische Handgriffe, die aber nicht allgemein, sondern bey jeder Anzahl von Seiten wieder anders sind, daher ihnen die obige Art vorzuziehen ist.

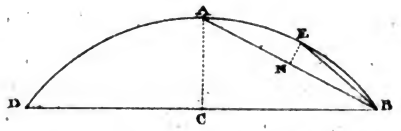


138. **Lehrsatz.** Die Seite des regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser gleich.

Beweis. Der Centriwinkel $C = 60°$, weil 360 dividirt durch 6 gleich 60 ist; es bleiben also in dem Dreyecke **ABC** für die beyden Winkel an der Grundlinie noch 120° übrig; denn 180 — 60 gibt 120. Da nun das Dreyeck wegen der gleichen Halbmesser gleichschenklicht ist, so sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und jeder hat die Hälfte von 120°, das ist, 60° zu seinem Maße. Es ist also das Dreyeck gleichseitig, weil gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber stehen, und $AB = AC$.

Digitized by Google

139. Zusatz. Der Halbmesser kann daher genau sechsmal auf der Peripherie herum getragen werden.



140. Lehrsatz. Je kleiner eine Sehne im Kreise ist, desto näher kommt sie auch an Länge ihrem Bogen.

Beweis. Zieht man **AC** rechtwinklicht auf **DB**; so ist die Sehne **AB** als die Hypotenuse von **ACB** offenbar länger, als die halbe Sehne **CB**, obschon **AEB** nur die Hälfte des Bogens der Sehne **DB** ist, und kommt folglich dem Bogen **AEB** an Länge näher, als **DB** dem Bogen **DAEB**. Eben so verhält es sich auch bey der Sehne **EB**, welche ihrem Bogen an Länge noch näher kommt.

141. Zusatz. Werden die Sehnen auf obige Art immer halbirt; so kann endlich eine Sehne gefunden werden, die an Länge ihrem Bogen beynahe gleich kommt.

142. Zusatz. Legt man den Halbmesser als die Sehne des regelmäßigen Sechseckes zum Grunde, und setzt die Halbirungen fort; so ist es begreiflich, wie das Verhältniß des Halb-

Digitized by Google

messers oder des doppelten, nämlich des Durchmessers, zum Umkreise gefunden werden kann.

Archimedes von Syrakus fand zuerst, daß, wenn man den Durchmesser in sieben gleiche Theile zertheilt, der Umkreis zwey und zwanzig solcher Theile in sich enthalte. Weit genauer gab Ludolph von Köln dieses Verhältniß in vielen Decimal-Zahlen an, wovon wir aber nur die 3 bis 4 ersten annehmen wollen, weil sie für die Ausübung bey Kunstgegenständen hinreichend sind. Wenn nach ihm der Durchmesser in 100 Theile getheilt wird, so erhält der Umkreis 314 solcher Theile. Theilt man den Durchmesser in 1000 Theile, so hält der Umkreis 3141. Wir wollen ein- für allemal das Verhältniß von 100 zu 314 beybehalten. Bey kleineren Kreisen kann man sich auch des Verhältnisses von 7 zu 22 bedienen.

143. Zusatz. Ist also in einem Kreise der Durchmesser bekannt, so kann der Umkreis; und ist der Umkreis bekannt, der Durchmesser gefunden werden. Z. B. der Durchmesser halte 24′, wie groß wird der Umkreis seyn?

Der Ansatz ist nach der Kettenregel folgender:

x Periph.?	24′ Durchm.
100′ D.	314′ P.

Antw. $75\frac{36}{100}$′.

Digitized by Google

Nach der Regel Detri:

D.	P.	D.?
100′	314′	24′

Antw. $75\frac{36}{100}$′.

Da der Schuh im Decimalmaße 10″ hält; so kann man zu 36 eine Nulle setzen, und nochmal mit 100 dividiren, wo $3\frac{60}{100}$″ hervor kommen. Setzt man zu 60 noch eine Nulle, so hat man 6‴; im Ganzen also 75,′ 3″, 6‴. Man sieht hieraus, daß nach diesem Verhältnisse der Umkreis leicht in Schuhen, Zollen und Linien Decimalmaßes erhalten werden kann.

Da nach der obigen Rechnung der Divisor 100 ist; so braucht man nur den gegebenen Durchmesser mit der Zahl 314 zu multipliciren, und die letzten zwey Zahlen wegen der Division mit 100 abzuschneiden, wodurch der obige Ansatz erspart wird.

144. Zusatz. Ist der Umkreis bekannt; so kann wieder der Durchmesser gefunden werden.

Der Umkreis halte z. B. 140′, wie groß wird der Durchmesser seyn?

Digitized by Google

x′ Durchm.?	140′ Periph.
314′ P.	100′ D.

14000	44′, 5″, 8‴.
314	
1256	
-1440	
314	
1256	
-1840	zu Zoll.
314	
1570	
-2700	zu Linien.
314	
2512	
-188	

Nach der Regel Detri:

P.	D.	P.?
314′	100′	140′

Antw. 44′, 5″, 8‴.

Aus dieser Rechnung erhellet, daß man zur gegebenen Peripherie nur zwey Nullen hinzu setzen, und das Product mit 314 dividiren darf, wodurch wieder der Ansatz erspart wird. Setzt man zu dem übrig gebliebenen Bruche immer eine Nulle; so kann durch fortgesetzte Division der Durchmesser in Decimalzollen und Linien gefunden werden, wie das Beyspiel zeigt.

Digitized by Google

Von der wirklichen Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen auf dem Felde oder Bauplatze.

145. **Anmerkung.** Zum Ausmessen der Linien bedient man sich gewöhnlich der Meßstangen oder Meßlatten von 10 bis 20 Schuh, die nach dem zwölftheiligen Maße in Schuhe, Zolle und Viertelszolle eingetheilt sind. Bey großen Flächen von Wiesen und Feldern gebraucht man auch die Meßkette, welche aus Gliedern von starkem Messing- oder Eisendraht, jedes zu einem Schuh, zusammengesetzt ist, und die gewöhnlich im Ganzen 100 Schuh hält. Um die Winkel zu messen, hat man besondere von Messing verfertigte Kreisbogen, die in ihre 360 Grade, und diese durch eine eigene Vorrichtung, die man den Nonius nennt, wieder in Minuten eingetheilt sind. Dieses Instrument bleibt aber für den gemeinen Mann immer zu kostspielig, und ist auch zum gewöhnlichen Ausmessen entbehrlich. Außer demselben bedienet man sich zum Aufnehmen ganzer Gegenden noch des Meßtisches und der Dioptern-Lineale, wozu ein guter Compaß, und eine genaue Wasserwage zum Aufstellen des Tisches kommt. Der Meßtisch mit seinen Zugehörungen ist daher nicht minder kostspielig, als die obigen Gradinstrumente

Digitized by Google

auch kann das Verfahren mit demselben nicht wohl durch Beschreibungen, sondern bloß durch Zusehen auf dem Felde erlernt werden. Wir halten uns daher bey Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen bloß an die Meßlatte; weil sich dieselbe jedermann selbst zu verfertigen weiß, und die nöthigen Ausmessungen sowohl für Künstler und Werkleute, als für den Landmann mit hinlänglicher Genauigkeit damit bewerkstelliget werden können. Hat jemand Gelegenheit, das Verfahren mit dem Meßtische zu sehen, so wird er darin keine Schwierigkeit finden, wenn er das, was in diesem Werke enthalten ist, wohl verstanden hat.

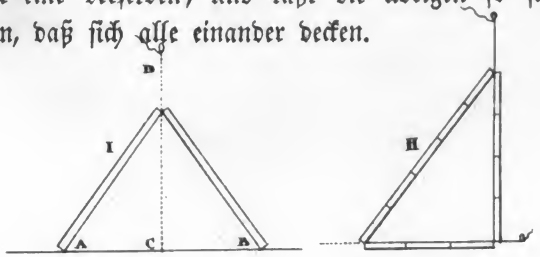
146. Aufgabe. Eine gerade Linie zu messen.

Man stecke ein Paar Stäbe in die Erde, und ziehe eine Schnur steif an, nehme dann die Meßlatte von 20 Schuh, und lege sie so oft an, als es die Länge der Linie erfordert. Ist der Boden abhängig, so muß die Latte so viel möglich, wagrecht gehalten werden.

147. Aufgabe. Eine gerade Linie mit Stangen abzustecken.

Digitized by Google

Man steckt ein Paar Stangen in die Endespunkte der Linie, tritt dann einige Schritte hinter eine derselben, und läßt die übrigen so stellen, daß sich alle einander decken.



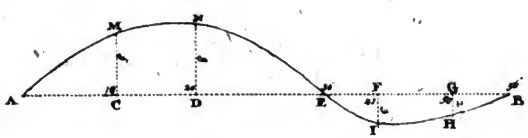
148. Aufgabe. Einen rechten Winkel auf dem Felde oder Bauplatze auszustecken.

Ist auf einer Linie **AB** Fig **I.** der Punkt **C** gegeben, auf welcher eine senkrechte errichtet werden soll; so nehme man von **C** gleiche Abschnitte **A** und **B**, lege zwey gleich lange Latten von **A** und **B** nach **D** zusammen; so kann von **C** nach **D** eine Schnur senkrecht gezogen, und dadurch der rechte Winkel errichtet werden. Oder: Fig. **II.**

149. Man trage eine gewisse Länge auf eine Latte dreymal, auf die andere viermal, und auf die dritte fünfmal; lege die Endespunkt dieser Latten zusammen, und ziehe an den kürzern

Digitized by Google

zwey Schnüren an; so gibt dieß ebenfalls einen rechten Winkel. Bey Zusammenlegung großer Balken bedient man sich dieser Art durchgehends, indem man auf einem derselben 12, auf dem andern 16, und auf einer Latte 20 Schuh aufträgt, und die Balken so lange hin- und herreibt, bis die Endespunkte mit der Latte genau zusammen treffen; daher dieses Verfahren bey den Werkleuten das Riebmaß genannt wird. Bey kleinern Linien werden die Theile zu 3, 4, 5 Schuh, oder zu 6, 8, 10 Schuh angenommen.



150. Aufgabe. Eine krumme Linie durch eine gerade **AB** zu messen, und nach dem verjüngten Maßstabe zu Papier zu bringen.

Man zeichne die vorzüglichsten Beugungen der krummen Linie aus freyer Hand beyläufig auf ein Papier, und ziehe eine gerade Linie **AB** durch selbe, so wie man sie ungefähr auf dem Felde an der krummen Linie hinmessen will. Man messe dann wirklich von **A** bis **C**, und schreibe die Anzahl von Schuhen auf den Handriß; hier 12; errichte bey **C** eine senkrechte **CM**, messe auch diese, und schreibe die Anzahl von Schu-

Digitized by Google

hen ebenfalls in den Handriß, hier 5, wie die Figur zeigt. Auf die nämliche Art verfahre mit **AD** und **DN**; bemerke auch die Anzahl von Schuhen bey **E**, wo die krumme Linie die gerade durchschneidet, hier 36. Eben so behandle die übrigen senkrechten Linien, bis die krumme Linie in allen ihren Beugungen gemessen ist.

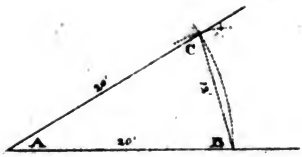
Will man sie nun zu Papier bringen, so mache man eine gerade Linie **AB**; trage nach dem verjüngten Maßstabe die Längen 12′, 20′, 36′ ꝛc. ihrer Ordnung nach von **A** gegen **B**; errichte auf diesen Punkten nach Seite 17, Nro. 40, die senkrechten **CM**, **DN**, **FI**, **GH**, und gebe ihnen die auf dem Handrisse angemerkten Längen von 5′, 8′ ꝛc.; so können die Endespunkte der senkrechten aus freyer Hand zusammen gezogen, und dadurch die krumme Linie mit hinlänglicher Genauigkeit erhalten werden.

151. **Anmerkung.** Die gerade Linie **AB** nennt man in der Geometrie eine **Abscissen-Linie**, und die darauf gesetzten senkrechten rechtwinklichte Ordinaten.

152. **Aufgabe.** Einen spitzigen Winkel zu messen, und zu Papier zu bringen.

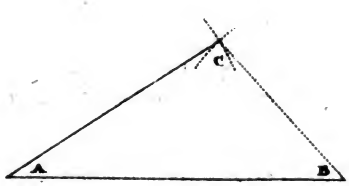
Man messe auf den beyden Schenkeln **AB** und **AC** überall eine Anzahl von Schuhen z. B.

Digitized by Google



20 bis 30, messe dann die Linie **BC**, und bemerke die Anzahl von Schuhen, Zollen und Viertelszollen sehr genau; so erhält man beym Auftragen der Linien auch den Winkel **A**; weil durch drey bekannte Seiten in einem Dreyecke auch die drey Winkel bekannt werden.

153. Will man diesen Winkel nach dem verjüngten Maßstabe zu Papier bringen; so ziehe man eine gerade Linie **AB**, trage die Anzahl von Schuhen nach dem verjüngten Maße von **A** nach **B**, und ziehe den Bogen **BC**; nehme dann die Länge der Linie **BC** ebenfalls auf dem verjüngten Maßstabe in den Zirkel, setze die Spitze in **B**, und durchschneide den Bogen bey **C**; so gibt **AC** den andern Schenkel des Winkels **A**.

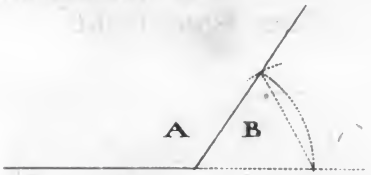


154. Können die beyden Schenkel nicht gleich lang gemessen werden, und ist z. B. der Schenkel **AC** kürzer, als **AB**; so trage man Anfangs

Digitized by Google

AB auf; nehme die Länge von **AC**, und mache damit aus **A** einen Bogen bey **C**; nehme dann die Länge von **BC**, und durchschneide damit aus **B** den Bogen bey **C**; so gibt **AC** wieder den andern Schenkel des Winkels **A**.

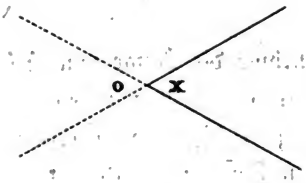
155. Anmerkung. Da an der Genauigkeit der Winkel sehr viel gelegen ist; so kann man sich zum Auftragen derselben einen größern Maßstab verfertigen, wo neben den Zollen auch noch wenigstens die Viertelszolle abgenommen werden können, und diesen nur zum Auftragen der Winkel gebrauchen, während man die Länge der Seiten einer Figur durch den dazu bestimmten kleinern Maßstab aufträgt.



156. Aufgabe. Einen stumpfen Winkel **A** zu messen.

Man verlängere einen Schenkel, und messe seinen Nebenwinkel **B**; so wird beym Auftragen von **B** der Winkel **A** von sich selbst übrig bleiben. Bey sehr stumpfen Winkeln muß allemal der Nebenwinkel gemessen werden, weil sich beym erstern die Linien nicht deutlich genug durchschneiden würden.

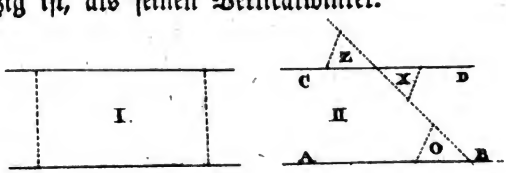
Digitized by Google



157. **Aufgabe.** Einen spitzigen Winkel **X**, zu welchem man nicht kommen kann, zu messen.

Man verlängere die beyden Schenkel, und messe seinen Verticalwinkel **O**, so wird beym Auftragen auch der Winkel **X** entstehen.

Ist der Winkel, zu dem man nicht kommen kann, ein stumpfer, so messe man, wenn es sich thun läßt, lieber seinen Nebenwinkel, welcher spitzig ist, als seinen Verticalwinkel.



158. **Aufgabe.** Parallellinien auszustecken.

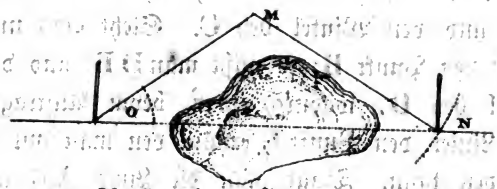
Man errichte auf obige Art ein Paar senkrechte Linien von gleicher Länge, und ziehe nach den Endespunkten derselben die Schnur an, wie die Figur **I.** zeigt. Oder Fig. **II.** Man ziehe eine schiefe Linie **ZO** unter einem spitzigen Winkel von der gegebenen **AB**; messe den Winkel bey **O**,

Digitized by Google

mache den bey X oder Z gleich O; so kann nach der Richtung von CD eine Linie parallel mit AB gezogen werden.

159. Aufgabe. Eine gerade Linie über einen Platz zu messen, durch welchen man nicht sehen, oder kommen kann.

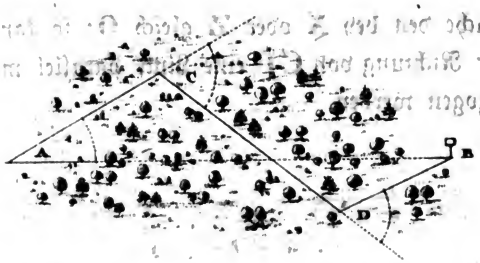
Man setze ein Paar senkrechte auf, und messe durch eine Parallellinie AB vorbey, wie die Figur zeigt; so ist AB = CD.



160. Aufgabe. Eine gerade Linie über eine Grube zu messen.

Man stecke ein Paar Stangen, wie die Figur zeigt, in der geraden Richtung nach dem Gegenstande, nach welchem man hinmißt, und messe den Winkel O, und die Linien OM und MN; so wird sich beym Auftragen die Linie ON abschneiden, und die Länge davon auf dem verjüngten Maßstabe finden lassen.

Digitized by Google



161. Aufgabe. Eine gerade Linie von dem Punkte A bis zum Punkte B durch einen Wald zu messen, wo man von A den Punkt B nicht sehen kann.

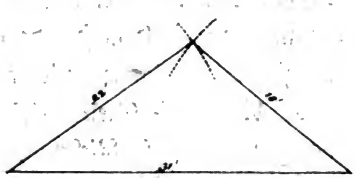
Man messe ungefähr nach der Richtung gegen B eine Linie A C. Kann man wegen Hindernisse von C nicht mehr in gerader Linie fortmessen, und man sieht von C nach D; so messe man C D, und den Winkel bey C. Sieht man nun von D den Punkt B; so mißt man D B, und den Winkel bey D, wodurch man beym Auftragen dieser Linien den Punkt B erhält, den man mit A verbinden kann. Trägt man die Linie A B auf den verjüngten Maßstab; so findet man dort ihre Länge.

Werden in der Zeichnung auf den Punkten A, C und B feine Stifte senkrecht errichtet, die Zeichnung auf ein Reißbret gespannt, dieses über den Punkt A auf dem Felde wagrecht, und zwar so gebracht, daß der Punkt A in der Zeichnung senkrecht über dem Punkte A auf dem Felde steht, bey C aber eine Stange gesetzt, und die Stifte

Digitized by Google

AC nach derselben gerichtet; so zeigt AB gerade auf den Punkt B; wo man eine gerade Linie, wenn es nöthig ist, nach dieser Richtung durch das Gebüsch hauen kann.

162. Anmerkung. Bey langen Linien wird zu dieser Aufgabe der Meßtisch, oder ein gutes Winkel-Instrument angewandt, so wie überhaupt die Entfernungen von Punkten, zu denen man nicht kommen kann, am sichersten durch diese Instrumente gemessen werden.



163. Aufgabe. Ein dreyeckiges Feld auszumessen, und zu Papier zu bringen.

Man messe die drey Linien, und schreibe die Maße derselben in einen beyläufigen Handriß; nehme beym Aufzeichnen eine Linie zur Grundlinie, trage ihr Maß auf dieselbe, und setze die übrigen mit Durchschneidungen darauf, wie die Figur zeigt.

164. Anmerkung. Da man bey jeder Figur einen ungefähren Handriß nöthig hat, um die Längen der Linien dazu zu schreiben; so muß man zuvor die Figur wohl umgehen, um ihre Seiten und Winkel genau kennen zu lernen. Auf

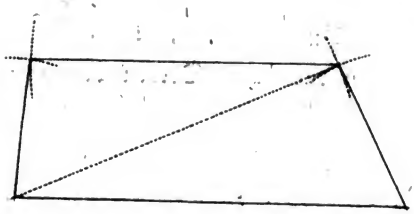
Digitized by Google

den Ecken läßt man Stangen stecken, damit man, wenn die Schnüre zu kurz sind, eine Linie abstecken, und in gerader Richtung nach denselben messen könne.

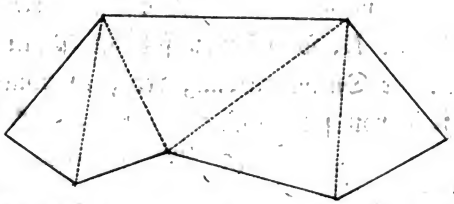
165. Hat man eine Meßkette; so werden die beyden Ringe, die sich hinten und vorne befinden, an zwey unten spitzigen Stangen gelegt, und die vordere durch die hintere jedesmal in gerader Richtung nach dem Gegenstande gestellt, nach welchem man hinmißt. Um dieses zu bewerkstelligen, winkt der Feldmesser dem vorausgehenden Kettenzieher so lange mit der Hand, links oder rechts, bis er die Stelle trifft, wo die vordere Stange in gerader Richtung mit der hintern das aufgestellte Zeichen deckt, auf welches man zumißt. Ist die Kette in gerader Richtung; so wird in den Platz der vordern Stange ein kleiner Stab gesteckt, und die Kette so lange vorwärts gezogen, bis die hintere Stange in die Stelle der vordern zu stehen kommt, wo der, von dem vordern Kettenzieher eingesteckte kleine Stab von dem folgenden aufgehoben wird. Nach ganz gemessener Linie zeigt die Anzahl der Stäbe die Anzahl der Ketten, und folglich die Länge der Linie an.

166. **Aufgabe.** Einen viereckigen Platz auszumessen.

Digitized by Google

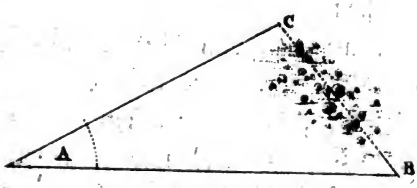


Man messe die vier Seiten, und die Diagonallinie; so kann das Ganze als zwey Dreyecke aufgetragen werden.



167. Aufgabe. Ein unregelmäßiges Vieleck auszumessen.

Man zerfälle die Figur in lauter Dreyecke; messe alle Seiten, und trage sie als lauter Dreyecke auf.

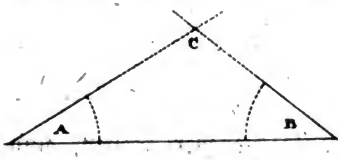


168. Aufgabe. Ein Dreyeck auszumessen, wo man von B nach C nicht kommen kann.

Man messe den Winkel bey A, dann die Seiten AB und AC, und verbinde beym Auf-

Digitized by Google

tragen die Punkte **B** und **C** mit einer geraden Linie; so ist das ganze Dreyeck bestimmt.



169. **Aufgabe.** Ein Dreyeck auszumessen, wo der Punkt **C** unzugänglich ist.

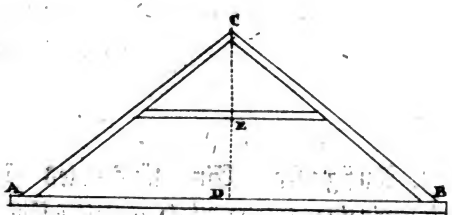
Man messe die Linie **AB**, und die Winkel bey **A** und **B**; so bestimmt sich der Punkt **C** vermittelst der Durchschneidung der zwey Linien **AC** und **BC** von sich selbst.

170. **Aufgabe.** Die Breite eines Flusses zu messen.

Man messe an dem Gestade eine Linie **AB**, und merke sich jenseits des Flusses einen bestimmten Punkt **C**; ziehe in der Richtung von **AC** eine Linie **AF** rückwärts, und messe den Winkel **D**, und bey **B** den Scheitelwinkel **E**; indem man die Linie nach der Richtung von **BC** rückwärts verlängert; so kann die Länge **AC** beym Aufzeichnen der Figur auf dem verjüngten Maßstabe gefunden werden.

Digitized by Google

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß durch die Messung der Winkel keine so große Genauigkeit erreicht werden könne, als durch die Messung aller Linien in einem Dreyecke, oder anderer Figur; daher man dieses letztere Verfahren, wo es seyn kann, allemal dem erstern vorziehen soll. Ist die Messung der Winkel aber durchaus nothwendig, so verfahre man mit der möglichsten Genauigkeit, sowohl beym Messen, als beym Auftragen derselben nach dem verjüngten Maßstabe; weil sich ohne diese Vorsicht durchaus keine Richtigkeit erwarten läßt.

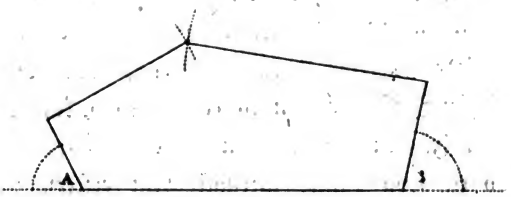


171. Aufgabe. Die Winkellehren von einem Dachgespärre abzunehmen.

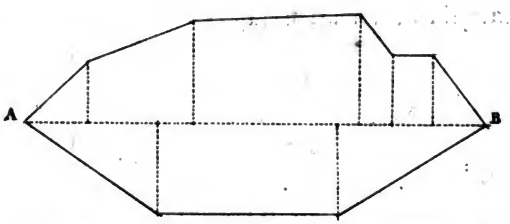
Man messe die Länge **AB**, und die Höhe **CD**, dann die Höhe des Kehlbalkens **ED**; so kann nach diesen Maßen, wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist, das Gespärr richtig zugelegt werden. — Wäre das Dreyeck ungleichschenklicht, so müssen die Linien **DA** und **DB** besonders gemessen werden.

172. Aufgabe. Ein Vieleck auszumessen, in welches man nicht hinein gehen kann.

Digitized by Google



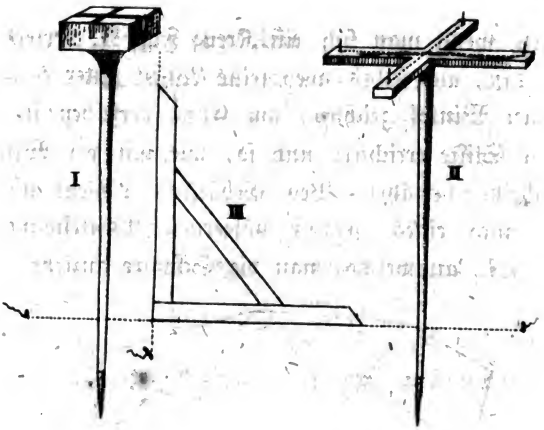
Man messe so viele Nebenwinkel, als man nöthig hat, hier zwey, **A** und **B**, und alle Seiten von außen, so läßt sich die ganze Figur richtig zu Papier bringen.



173. **Aufgabe.** Ein länglichtes Vieleck durch eine einzige gerade Linie auszumessen.

Man messe die Linie **AB**, fälle aus jedem Winkel senkrechte auf dieselbe, und schreibe die Längen aller Linien genau auf; so können die Endpunkte der senkrechten zusammen gezogen, und die ganze Figur richtig aufgezeichnet werden. Das Verfahren ist hier das nämliche, wie bey der krummen Linie; nur daß die äußern Linien in gerader Richtung nach dem Lineale zusammen gezogen werden, die sich durch die Endespunkte der senkrechten von sich selbst bestimmen.

Digitized by Google

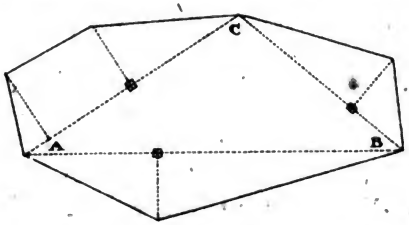


174. **Anmerkung.** Die Feldmesser bedienen sich zum Aufrichten oder Fällen der rechten Winkel der sogenannten Winkelscheibe Fig. **I.**, welches ein rundes oder viereckiges Stück Holz auf einem mit einer Spitze versehenen Fuße ist, in das mit einer Säge ein Kreuz rechtwinklicht eingeschnitten wird, wie die Figur zeigt. Mit diesem Instrumente geht man auf der Linie **AB** in der vorhergehenden Aufgabe so lange auf und ab, bis man dasselbe senkrecht so einstecken kann, daß man durch einen Schnitt die Punkte **A** und **B**, und durch den andern das Zeichen, welches man in dem Winkel errichtet hat, sehen kann, wo aus dem Punkte der Winkelscheibe bis in den Winkel die senkrechte gemessen wird.

175. Noch genauer kann man rechte Winkel ausstecken, oder aus einem bestimmten Punkte

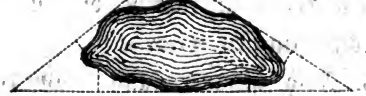
Digitized by Google

fällen, wenn man sich ein Kreuz Fig. II. verfertigen läßt, auf selbes zwey feine Linien unter einem rechten Winkel zeichnet, am Ende derselben senkrechte Stifte errichtet, und so, wie mit der Winkelscheibe verfährt. Bey Gebäuden bedient man sich auch eines großen hölzernen Winkelmaßes, Fig. III., an welches man die Schnüre anzieht.



176. **Aufgabe.** Ein großes Vieleck durch ein Dreyeck zu messen.

Man messe ein Dreyeck nach Gutbefinden in die Figur, hier **ABC**, und von den Seiten desselben in die Winkel senkrechte Linien; so bestimmen sich, wenn das Dreyeck und die senkrechten aufgetragen werden, die Seiten des Vieleckes durch die Endespunkte der senkrechten. Ist das Vieleck sehr weitschichtig; so können auch mehrere Dreyecke an einander gemessen, und darauf die senkrechten gefällt werden.

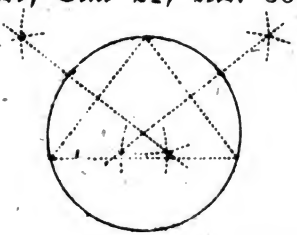


177. **Aufgabe. Einen Teich auszumeſſen.**

Man ſchließe ihn in ein Dreyeck oder Viereck, hier in ein Dreyeck, meſſe die Seiten desſelben, und ſetze auf die ſtärkſten Beugungen ſenkrechte Linien; ſo kann man, wenn dieſe nach dem verjüngten Maße aufgezeichnet werden, die krumme Linie mit hinlänglicher Genauigkeit aus freyer Hand ziehen. Die kurzen Perpendikel werden ſowohl hier, als in den vorhergehenden Aufgaben ohne Winkelſcheibe, bloß nach dem Augenmaße, ſenkrecht gemeſſen.

178. **Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck auszumeſſen, und zu Papier zu bringen.**

Man meſſe nur Eine Seite, und bemerke die Anzahl der Seiten des Vieleckes; ſo kann dasſelbe nach der Aufgabe, Seite 24, Nro. 56, aufgezeichnet werden.

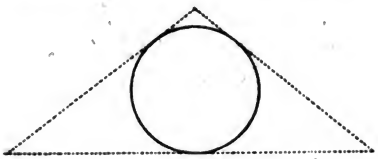


179. **Aufgabe. Eine Kreisfläche, wo der Mittelpunkt nicht bekannt iſt, auszumeſſen.**

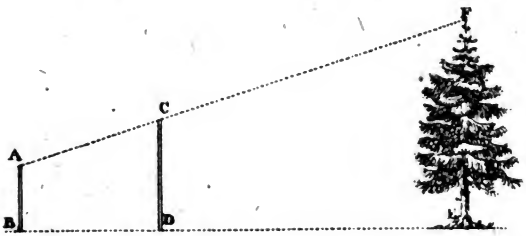
Man meſſe durch drey Punkte des Kreiſes ein Dreyeck, bringe dieſes nach dem verjüngten Maßſtabe zu Papier, und ſuche durch Aufſetzung

Digitized by Google

zweyer senkrechten den Mittelpunkt; so kann durch die Spitzen des Dreyeckes der Kreis nach seiner Größe beschrieben werden.



180. Kann man in den Kreis nicht hinein gehen; so messe man ein Dreyeck um selben herum, doch so, daß die Seiten die Kreislinie berühren; so kann man wieder, wenn das Dreyeck aufgetragen ist, durch Zertheilung zweyer Winkel den Kreis in das Dreyeck hinein beschreiben.

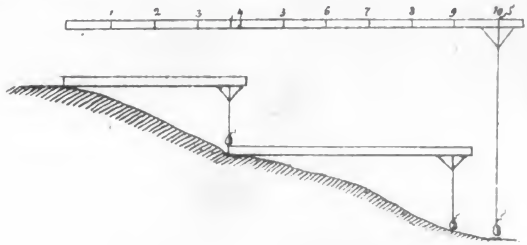


181. **Aufgabe.** Die Höhe einer Mauer oder eines Baumes zu messen.

Man stecke in einiger Entfernung von dem Gegenstande eine Stange **AB**, ungefähr 5 Fuß hoch, lasse eine andere Stange **CD** in gerader Richtung mit dem Baume so stecken, daß die

Digitized by Google

drey Punkte **ACF**, wenn man über **A** hinsieht, sich einander decken; messe die Entfernung der beyden Stangen **BD**, ihre Höhe **AB** und **CD**, und die Linie **BE**; so wird sich, wenn die Figur aufgezeichnet ist, und bey **E** eine senkrechte Linie errichtet wird, die Höhe **EF** durch **ACF** abschneiden, und auf dem verjüngten Maßstabe finden lassen.



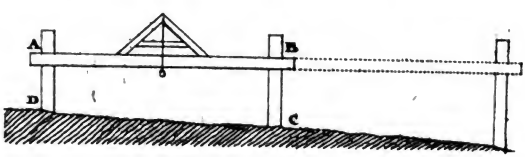
182. **Aufgabe.** Eine gerade Linie über einen Berg zu messen.

Man nehme eine Meßlatte von 10 Schuhen, befestige vorne ein gleichschenklichtes Dreyeck daran, dessen Spitze senkrecht auf dem Punkte 10 steht. Von diesem Punkte lasse man durch eine kleine Oeffnung eine Schnur mit einem Senkbley herunter, welches man auf- und abziehen kann. Beym Messen lege die Latte so an, daß das Senkbley mit der Schnur an der Spitze des gleichschenklichten Dreyeckes steht, wodurch die Latte immer wagrecht bleibt, und stecke dort, wo das Senkbley den Boden berührt, einen klei-

Digitized by Google

nen Stab, an welchen man die Latte wieder anlegt, und so fortfährt, bis die Linie gemessen ist.

183. **Anmerkung.** Da alles, was auf den Bergen wächst, oder auch gebaut wird, in senkrechter Richtung mit der Grundfläche steht, so muß bey dergleichen Gegenständen auch nur auf die wagrechte Linie, und keineswegs auf die schiefe, Rücksicht genommen werden. Bey Flächen aber, die gepflastert, oder mit etwas bedeckt werden, wie Strassen und Dächer, wird nur die schiefe Linie gemessen und in Anschlag gebracht.

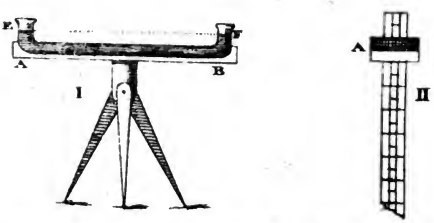


184. **Aufgabe.** Einen Platz wagrecht abzuebnen.

Man läßt mehrere Pfähle einschlagen, legt eine gerade Latte **AB** an dieselben, stellt dann die Setzwage auf, und bemerkt bey **A** und **B** mit Linien die Höhe der Latte, wodurch man sehen kann, wie viel der Punkt **C** niederer ist, als der Punkt **D**. Auf diese Art verfährt man mit allen eingeschlagenen Pfählen. Ist die Höhe überall richtig angezeigt; so weiß man, wie viel Erde an einem Orte angeschüttet, und an einem andern hinweg genommen werden muß.

Digitized by Google

185. Auf diese Art kann man auch das Gefäll eines laufenden Wassers in Bächen und Kanälen finden, welches man Nivelliren oder Abwägen des Wassers nennt, wenn die Linien, durch die man den Fall des Wassers untersuchen will, nicht zu lange sind. Denn wenn man auf die obige Art mehrere Pfähle an dem Ufer einschlägt; so wird der letzte anzeigen, um wie viel die Linie von der Latte abwärts länger ist, als die erste.

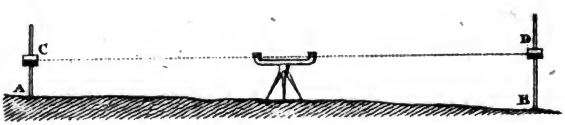


186. **Aufgabe.** Das Gefäll des Wassers auf einer langen Linie zu finden.

Man lasse sich eine gläserne Röhre **AB**, Fig. **I.** von ungefähr $2\frac{1}{2}$ Fuß Länge verfertigen, die an den beyden Enden **A** und **B** aufgebogen ist, und befestige dieselbe auf einem Stative von Holz. In die Röhre gieße man roth gefärbtes Wasser, das sich in derselben hin- und herbewegen kann, und bey **E** und **F** zum Vorschein kommen wird. Hier werden die beyden Flächen **E** und **F** nach hydrostatischen Gesetzen immer in einer wagrechten Linie stehen, man mag das Instrument

richten, wie man will, wodurch dasselbe zum Nivelliren brauchbar wird.

Ferners läßt man sich eine Latte Fig II. von ungefähr 7 bis 8 Schuh Länge verfertigen, die in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt ist, und richtet ein Querbretchen **A** so, daß es sich auf- und abschieben läßt, wovon die eine Hälfte weiß, die andere aber schwarz angestrichen ist, damit man es sowohl auf einem dunkeln, als lichten Gründe deutlich sehen kann.



Soll man nun das Gefäll von einer Linie **AB** bestimmen; so stelle man das Instrument in die Mitte dieser Linie und richte es nach dem Punkte **A**. Man stelle sich sodann etwas hinter das Instrument, sehe an den obersten Flächen des rothen Wassers vorbey nach der Latte **A**, und lasse sich das bewegliche Querbretchen so lange auf- und abschieben, bis die zwey Oberflächen des Wassers, und die obere Linie des Bretchens sich decken; so wird dieses die Höhe **AC** nach Schuhen, Zollen und Linien bestimmen. Läßt man ferner das Instrument unbeweglich stehen, und sieht nach dem Punkte **B**;

Digitized by Google

so zeigt auch hier das Bretchen an der Latte die Höhe der Linie **BD**. Da nun **CD** vollkommen wagrecht ist; so erhält man den Fall von **AB**, wenn man **AC** von **BD** abzieht.

Das Gefäll von Linien, welche mehrere Standpunkte erfordern, kann also eben so leicht erhalten werden; weil man nur, um das Ganze zu finden, das Gefäll der einzelnen Punkte zusammen addiren darf. Ereignet es sich, daß eine solche Linie manchmal steigt, und manchmal fällt; so müssen die steigenden Punkte, und die fallenden in zwey Reihen gesetzt, und die Summe der einen von der Summe der andern abgezogen werden; wo der Rest zeigen wird, um wie viel die Linie steigt oder fällt.

Das bisher angezeigte Verfahren wird für den Künstler und Werkmann um so brauchbarer seyn, als er sich das dazu nöthige einfache Instrument mit geringen Kosten anschaffen kann.

Bey Linien, welche eine Länge von mehreren Stunden haben, kommt auch der scheinbare Horizont, der von dem wahren abweicht, in Betracht. Weil aber so lange Linien im Kunstfache nie vorkommen; so wird ihre fernere Behandlung hier für unnöthig gehalten.

187. **Aufgabe. Die Länge einer Linie, oder auch den Inhalt einer Fläche mit Schritten zu bestimmen.**

Digitized by Google

Man messe eine Linie von 10 oder 20 Schuhen; gehe öfter auf derselben auf und ab; doch ohne sich im Gehen einen Zwang anzuthun, damit die Schritte nicht ungleich werden, und zähle jedesmal die Schritte. Hat man z. B. gefunden, daß 6 Schritte 10 Schuh ausmachen; so hat man ein Verhältniß, nach welchem man die Länge der abgeschrittenen Linien für alle Fälle, die keine große Genauigkeit erfordern, bestimmen kann.

Von den Verwandlungen der Figuren.

188. **Erklärung.** Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt der Figur eine andere Gestalt geben, ohne ihren Flächeninhalt zu verändern. Dazu dienen nun vorzüglich folgende bereits oben erwiesene Lehrsätze:

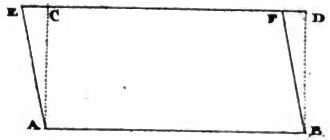
Ein jedes Parallellogramm kann durch eine Diagonallinie in zwey gleiche Dreyecke getheilt werden.

Parallellogramme von einerley Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

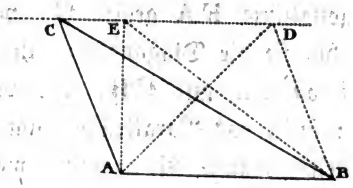
In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypotenuse eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

189. **Aufgabe.** Eine Raute in ein Rechteck zu verwandeln.

Digitized by Google



Man erhebe auf den Endespunkten der Grundlinie **AB** zwey ſenkrechte **AC** und **BD**; ſo iſt nach Nr. 115. **ABCD=AEFB.**

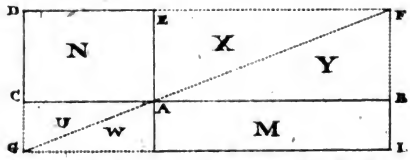


190. **Aufgabe.** Ein ſtumpfwinklichtes Dreyeck in ein gleichſchenklichtes oder rechtwinklichtes zu verwandeln.

Man erhebe aus einem Endpunkte der Grundlinie **AB**, hier in **A**, eine ſenkrechte **AE**; ziehe aus der Spitze **C** eine Parallellinie mit **AB**, und ſchließe das Dreyeck mit **EB**: ſo iſt **AEB =ACB.** Bey dem gleichſchenklichten Dreyecke wird eine ſenkrechte in der Mitte von **AB** errichtet, und von **CD** abgeſchnitten, wodurch wieder **ADB=ABC** wird. Beydes iſt aus Nr. 117. Seite 57 klar.

191. **Aufgabe.** Ein Parallellogramm in ein anderes zu verwandeln, wovon entweder die Grundlinie, oder die Höhe gegeben iſt.

Digitized by Google

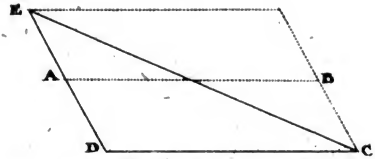


Das Parallellogramm **ACDE** soll in ein anderes verwandelt werden, wovon die Grundlinie **AB** gegeben wird. Man errichte bey **B** einen Perpendikel **BF**, verlängere die Linie **DE** bis **F**; ziehe die Diagonallinie **FA** gegen **G**, verlängere auch **DC**, bis sie die Diagonallinie in **G** schneidet; ziehe **GI** parallel mit **CB**, und verlängere **FB** bis **I**: so ist das Parallellogramm **N** gleich dem Parallellogramme **M**. Denn wenn man das ganze Parallellogramm **DGIF** durch die Diagonallinie **FG** in zwey gleiche Dreyecke **DGF**, und **FGI** zerschnitten betrachtet; so zeigt es sich, daß die Dreyecke **U** und **W**, dann auch **X** und **Y** einander gleich sind; nimmt man von einem jeden der beyden großen Dreyecke **FGD** und **FGI** die kleinen **U** und **W**, **X** und **Y** hinweg; so müssen die übergebliebenen Parallellogramme **N** und **M** einander gleich bleiben.

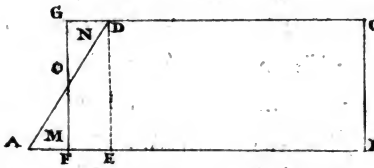
Ist anstatt der Grundlinie die Höhe gegeben; so kann man sie ebenfalls an die Linie **CA** setzen, und wie oben verfahren, wo aber die Grundlinie zur Höhe wird.

192. **Aufgabe. Ein Dreyeck in ein Parallellogramm zu verwandeln.**

Digitized by Google



Da die Dreyecke Hälften von Parallellogrammen sind, so ergänze man sie zu solchen, und halbire sie durch einen Parallelschnitt, wie hier durch **AB**; so ist das Parallellogramm **ABCD** gleich dem Dreyecke **EDC**. Oder man halbire **DE**, und ziehe **AB** mit **DC** parallel: so geschieht das Nämliche.

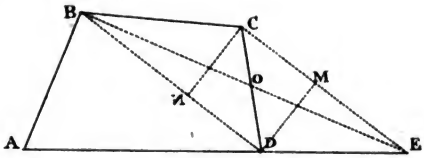


193. **Aufgabe.** Ein Paralleltrapez **ABCD** in ein Parallellogramm zu verwandeln.

Man ziehe **DE** mit **BC** parallel, halbire **AE**, ziehe **FG** parallel mit **DE**, und verlängere **CD** bis **G**; so ist das Parallellogramm **GCBF** = **ABCD**; weil die Dreyecke **M** und **N** gleiche Grundlinien und Höhen haben, folglich durch **M** eben so viel hinweg geschnitten wird, als durch **N** hinzu kommt.

194. **Aufgabe.** Ein Trapezoid in ein Dreyeck zu verwandeln.

Digitized by Google

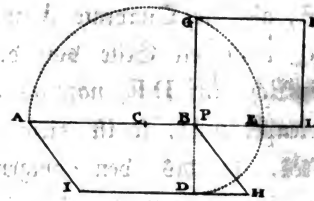


Man ziehe in dem Trapezoide **ABCD** die Linie **BD**, so bleibt noch das Dreyeck **BDC** übrig; zieht man nun mit **BD** die Parallellinie **CE**, und verlängert die Grundlinie **AD** bis **E**; so gibt **BE** die Gränze des neuen Dreyeckes **ABE**, welches dem gegebenen Trapezoide vollkommen gleich ist. Denn die Dreyecke **BEC** und **CDE** sind einander gleich, weil sie einerley Grundlinie **CE**, und wegen der Parallelen einerley Höhe **DM** und **CN** haben; das Dreyeck **COE** ist beyden gemein, und kann also ohne Schaden der Gleichheit hinweg gelassen werden: folglich bleibt das Dreyeck **BOC**, welches hinweg geschnitten wird, gleich dem Dreyecke **ODE**, welches hinzu kommt.

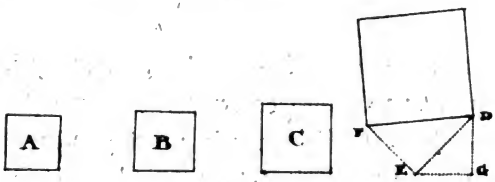
195. **Zusatz.** Da hier das Trapezoid um eine Seite vermindert wurde; so kann auch ein jedes unregelmäßige Vieleck auf die nämliche Art immer um eine Seite vermindert werden, bis es zum Dreyecke wird; daher läßt sich auch jedes unregelmäßige Vieleck in ein Dreyeck verwandeln.

196. **Aufgabe. Ein Parallellogramm in ein Quadrat zu verwandeln.**

Digitized by Google



Man verlängere die Seite **AB** des gegebenen Parallellogrammes **ABHI** um die Höhe desselben, so, daß **BE = BD** wird; theile die ganze Linie **AE** in zwey gleiche Theile **AC** und **CE**, ziehe mit **CE** einen halben Kreisbogen; so ist **GB** die Seite des Quadrates **PGKL**, welches eben so groß ist, als das gegebene Parallellogramm **ABHI**. Die Ursache dieser Verwandlung wird bey der Aehnlichkeit der Figuren, und den Proportionallinien angegeben werden.

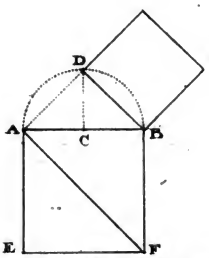


197. **Aufgabe.** Mehrere Quadrate in Eines zu verwandeln. Z. B. die Quadrate **A, B** und **C**.

Man setze die Seiten von zweyen gegebenen Quadraten **A** und **B** unter einem rechten Winkel bey **G** zusammen, und ziehe die Hypotenuse **DE**; so ist dieses die Seite eines Quadrates, welches

Digitized by Google

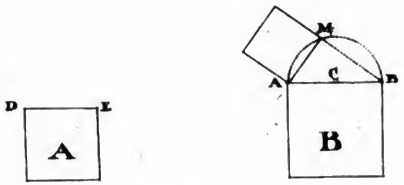
eben so groß ist, als die Quadrate **A** und **B** zusammen. Setzt man die Seite von dem Quadrate **C** rechtwinklicht auf **DE**, nämlich **EF**, und zieht die Hypotenuse **FD**, so ist diese die Seite eines Quadrates, welches den obigen dreyen **A**, **B**, **C** gleich ist. Sind noch mehrere Quadrate gegeben; so können sie auf diese Art alle in Eines verwandelt werden.



198. **Aufgabe.** **Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebenes.**

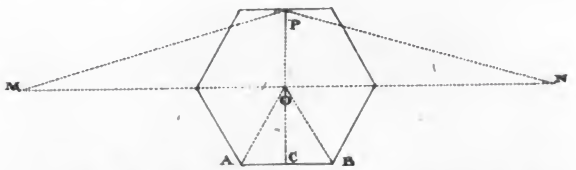
Man theile eine Seite **AB** in zwey gleiche Theile, ziehe aus **C** einen halben Kreisbogen **ADB**, errichte aus dem Mittelpunkt **C** eine senkrechte **CD**, und ziehe die Linie **DB**, so ist diese die Seite eines Quadrates, welches halb so groß ist, als das gegebene **ABFE**; denn die beyden Katheten sind hier einander gleich, folglich ihr Quadrat die Hälfte von dem Quadrate der Hypotenuse **AB**. Zieht man **AF**; so ist dieses die Seite eines Quadrates, welches noch einmal so groß ist, als das Quadrat **AEFB**.

Digitized by Google



199. **Ein Quadrat A von einem andern B abzuziehen.**

Man theile eine Seite des größeren Quadrates **AB**, in zwey gleiche Theile, mache mit **AC** einen halben Kreisbogen, und trage die Seite des kleineren Quadrates **DE** als eine Sehne **BM** darein; so ist **MA** die Seite des übrig gebliebenen Quadrates. Die Ursachen dieser letzten drey Auflösungen der Aufgaben liegen in dem Lehrsatze Seite 58, und in seinen Zusätzen.

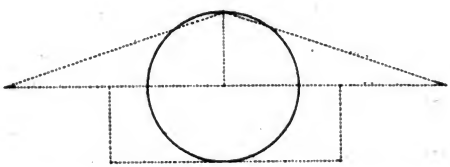


200. **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Vieleck in ein Dreyeck zu verwandeln.

Da die Halbmesser, die aus dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vieleckes in die Polygonwinkel gezogen werden, das Vieleck in lauter gleiche Dreyecke zertheilen, wovon **AB** die Grundlinie eines jeden, und **OC** die gemein-

Digitized by Google

schaftliche Höhe ist; so kann man alle Grundlinien auf eine Linie **MN** tragen, auf derselben, wo immer, eine senkrechte von der Länge **OC** errichten, und die Endespunkte **MNP** durch Linien verbinden, wodurch man ein Dreyeck erhält, welches dem Inhalte nach einem regelmäßigen Vielecke, hier einem Sechsecke, gleich ist.



201. **Aufgabe.** Eine Kreisfläche in ein Dreyeck zu verwandeln.

Betrachtet man die Kreisfläche als eine Figur, welche aus unendlich vielen und unendlich kleinen Dreyecken besteht, oder als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, wovon die allgemeine Höhe der Halbmesser und die Grundlinie der Umkreis ist; so kann auch dieser in ein Dreyeck verwandelt werden, wenn man den Umkreis durch Rechnung sucht, ihn zur Grundlinie, und den Halbmesser zur Höhe nimmt.

202. **Zusatz.** Will man anstatt des Dreyeckes ein Parallellogramm; so nimmt man entweder den halben Umkreis und den Halbmesser,

Digitized by Google

oder den ganzen Umkreis und die Hälfte des Halbmessers, oder auch den Durchmesser und den vierten Theil des Umkreises, und verfertiget daraus ein Parallellogramm.

203. **Zusatz.** Ueberhaupt lassen sich alle Figuren, die in Dreyecke verwandelt werden können, auch in Parallellogramme, und aus diesen in Quadrate verwandeln, wie man aus dem, was bisher gesagt wurde, leicht einsehen kann.

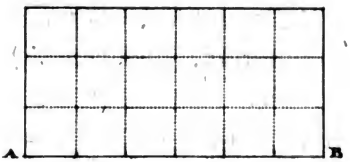
Von der Ausrechnung der Flächen.

204. **Erklärungen.** Will man den Inhalt einer Fläche berechnen; so muß ein bestimmtes Flächenmaß zum Grunde angenommen werden. Das Quadrat ist hiezu die schicklichste Figur. Man nimmt daher gewöhnlich den Quadratschuh, welches eine Fläche ist, die einen landesüblichen Schuh in der Länge und Breite hält. Nach dem neuen französischen Maße nimmt man den Quadratmetre, welcher eine Fläche von einem Metre Länge und Breite gibt.

205. Den Inhalt einer Fläche findet man, wenn man einen Quadratfuß so oft in derselben herum legt, als dieses angeht.

206. **Aufgabe.** **Den Flächeninhalt eines Rechteckes zu finden.**

Digitized by Google



Man multiplicire die Grundlinie mit der Höhe; so hat man den verlangten Inhalt. Denn auf der Grundlinie **AB** können so viele Quadratschuhe stehen, als viele Schuhe sie lang ist, und diese Reihe von Quadratschuhen kann so oft wiederholt werden, als viele Schuhe das Rechteck breit ist, wie sich aus der Figur deutlich abnehmen läßt.

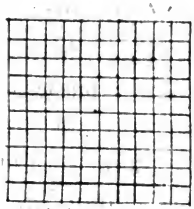
207. **Zusatz.** Da in dem Quadrate die Grundlinie gleich der Höhe ist; so gibt jede Zahl, mit sich selbst multiplicirt, ein Quadrat.

208. **Zusatz.** Weil der Schuh im bürgerlichen Maße in 12 Zoll eingetheilt wird, und der Quadratschuh 12 Zoll Länge und Breite hält, so faßt die ganze Fläche eines solchen Quadratschuhes 144 Quadratzoll in sich. Weil ferner der Quadratzoll 12 Linien Länge und Breite hält; so hat dieser auch 144 Quadratlinien.

Im zehntheiligen Maße hält der Quadratschuh 10 Zoll Länge und Breite; folglich die ganze Quadratfläche eines Schuhes 100 Quadratzoll, und der Quadratzoll 100 Quadratlinien. Beystehende Figur zeiget einen zehnthei-

Digitized by Google

ligen Quadratzoll in seine Quadratlinien eingetheilt an.



Da die Klafter im bürgerlichen Maße eine Länge von 6 Schuhen hält; so hat die Quadratklafter 6 Schuh Länge und Breite, folglich 36 Quadratschuh.

Die Ruthe im zehntheiligen Maße hat 10 Schuh Länge, und also die Quadratruthe 10 Schuh Länge und Breite, folglich 100 Quadratschuh.

209. Weil man in unserer Gegend den Inhalt einer Fläche gewöhnlich nur in Quadratschuhen anzeigt, so wollen wir auf die Klafter und Ruthen keine fernere Rücksicht nehmen, und alle Berechnungen nur nach Quadratschuhen, Zollen und Linien ansetzen. 40000 Quadratschuh, das ist eine Fläche von 200′ Länge und 200′ Breite, geben ein bayerisches Juchart, Tagwerk, oder einen Morgen Feldes.

210. Hat man eine Fläche nach dem bürgerlichen Maße ausgemessen, und durch den verjüngten Maßstab zu Papier gebracht; so darf man

Digitized by Google

nur den verjüngten Schuh in 10 Theile eintheilen, wodurch alle Längen nach dem Decimal-Maße abgenommen und berechnet, das Ganze aber doch im bürgerlichen Maße gefunden werden kann; weil der bürgerliche Schuh als Grundmaß angenommen, und die nach einer vollendeten Rechnung übrig gebliebenen Decimal-Quadratzolle in den meisten Fällen in keinen Betracht kommen, oder, wenn es nöthig ist, leicht in zwölftheilige verwandelt werden können, wie wir gleich sehen werden.

211. Aufgabe. Das zehntheilige Quadratmaß in zwölftheiliges zu verwandeln.

Da 100 zehntheilige Quadratzoll 144 zwölftheilige ausmachen; so hat man ein Verhältniß, nach welchem man dieses leicht bewerkstelligen kann. Es sollen z. B. 46 zehntheilige Quadratzoll in zwölftheilige verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

x″ zwölfth.?	46″ zehnth.
100 zehnth.	144 zwölfth.

Antw. $66\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$ zwölfth. Quadratzoll.

Sucht man den Bruch $\frac{6}{25}$ in Quadratlinien; so wird, weil es zwölftheiliges Maß ist, 6 mit 144 multiplicirt, und durch 25 dividirt, $34\frac{14}{25}$ Quadratlinien geben.

Digitized by Google

Nach der Regel Detri:

Zehnth.	zwölfth.	zehnth. ?
100″	144″	46″

Antw. $66\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$″.

Bey der Verwandlung des zwölftheiligen Maßes in zehntheiliges ist das Verfahren umgekehrt, und kann eben so leicht bewerkstelliget werden.

212. Das Zeichen des Quadratmaßes ist ein kleines Quadrat oberhalb der Zahl neben dem Zeichen der Schuhe und Zolle:

$3\square'$ $4\square''$ $5\square'''$.

3 Quadratschuh, 4 Quadratzoll, 5 Quadratlin.

Man könnte im gewöhnlichen Anschreiben anstatt des □ ein kleineres Zeichen machen, wodurch man in den Stand gesetzt wäre, dieses geschwinder und leichter auszudrücken:

$3^{\blacksquare'}$ $4^{\blacksquare''}$; oder $3', 4''^{\blacksquare}$

3 Quadratschuh, 4 Quadratzoll.

213. Weil der Quadratschuh im zehntheiligen Maße 100 Zoll, und der Zoll 100 Linien hält; so können die Schuhe leicht zu Zollen, und die Zolle zu Linien gemacht werden, wenn man nur zwey Nullen anhängt. Will man aber die Zolle zu Schuhen machen; so braucht man nur die letzten zwey Ziffer abzuschneiden, weil dieses eben so viel ist, als wenn mit 100 dividirt würde. Beym zwölftheiligen Maße muß aber

Digitized by Google

jederzeit mit 144 multiplicirt, oder dividirt werden, woraus sich wieder der Vortheil des zehntheiligen Maßes im Berechnen ergibt. Das zehntheilige Längenmaß unterscheidet sich also von dem zehntheiligen Quadratmaße darin, daß bey den Verwandlungen des ersten nur eine Nulle beygesetzt, oder ein Ziffer abgeschnitten werden muß, bey den Verwandlungen des zweyten aber zwey Nullen beygesetzt, und zwey Ziffer abgeschnitten werden müssen. Man kann daher nur immer das Längen- mit dem Längenmaße, und das Quadrat- mit dem Quadratmaße vergleichen. Wir wollen von beyden, vom zehntheiligen Längen- und Quadratmaße einige Beyspiele in verschiedenen Rechnungsarten anführen, und zwar erstens vom zehntheiligen Längenmaße.

Beyspiel. Es sollen 66′, 4″, 3‴ zu 412′, 7″, 5‴ addirt werden. Man setze die Zahlen wie gewöhnlich unter einander, so ist es eben so viel, als wenn die Schuhe und Zolle zu lauter Linien gemacht, und als solche berechnet würden.

412′7″5‴
66 4 3

479′1″8‴

Nach vollendeter Rechnung setzt man auf die hinterste Zahl drey Striche, auf die folgende zwey, und auf die dritte einen, welches 479 Schuh, 1 Zoll, und 8 Linien ausmacht. Denn,

Digitized by Google

wenn eine Zahl mehr, als 10 in der Addition gibt; so wird sie schon zur vorhergehenden genommen.

Beyspiel. Zu 715′ sollen 64′, 3″ addirt werden. Da in der obern Reihe keine Zolle sind; so macht man dafür eine Nulle, oder bildet sich ein, als wenn eine da stände, und verfährt wie oben. Ueberhaupt müssen allemal die abgängigen Zahlen in einer oder der andern Reihe mit Nullen ergänzt werden, damit die Zahlen durchaus gleichartig bleiben.

715′0″
64 3
779′3″

Da hier die Linien mangeln; so wird nur die letzte Zahl abgeschnitten, und das Zeichen der Zolle darauf gesetzt.

Beyspiel. Zu 24′, 5‴ sollen 13′, 2″, 7‴ addirt werden. Hier muß man in der obern Reihe wieder die Zolle mit einer Nulle ergänzen.

24′0″5‴
13 2 7
37′3″2‴

Beyspiel. Von 34′, 7″, 3‴ sollen 15′ 8″, 3‴ abgezogen werden.

34′7″3‴
15 8 3
Rest: 18′9″0‴

Beyspiel. Eine Linie von 15′, 7″, 5‴ soll fünfmal so lang gemacht werden.

Digitized by Google

15′7″5‴
5
78′7″5‴

Beyspiel. Eine Linie von 10′, 6‴ soll in 8 Theile getheilt werden.

10′0″6‴ | 1′, 2″, $5\frac{3}{4}$‴.
8 |

214. Die Berechnungen im zehntheiligen Quadratmaße haben ihren Unterschied größtentheils in der Setzung der Zeichen, im Ansatze sind sie mit den vorhergehenden gleich.

Beyspiel. Es sollen 120□′, 45□″, 30□‴ zu 246□′, 10□‴ addirt werden. Da in der letzten Reihe keine Zolle sind; so muß man dafür zwey Nullen setzen, weil die ganze Zahl gleichsam in lauter Quadratlinien berechnet wird.

246′00″10‴□
120 45 30
366′45″40‴□

Bey Setzung der Zeichen am Ende der Rechnung werden allemal zwey Ziffer abgeschnitten; weil erst drey, nämlich 100 Quadratlinien, einen Quadratzoll, und 100 Quadratzoll einen Quadratschuh ausmachen.

Beyspiel. Von 524□′, 25□″ sollen 215□′, 24□″, 3□‴ abgezogen werden. Da oben keine Linien sind; so setzt man dafür zwey Nullen, und weil die Zahl 3 nur eine Einheit ist; so muß

man ihr ebenfalls eine Nulle vorsetzen, damit die Zahlen durchaus gleichartig werden, welches man in der Folge immer zu beobachten hat.

524′25″00‴□
215 24 03

309′00″97‴□

Wenn bey der Quadratrechnung zwey Linien mit einander multiplicirt werden; so entsteht allemal der Quadratinhalt einer Fläche, wie wir bereits oben gesehen haben. Es halte z. B. die Grundlinie eines regelmäßigen Viereckes 340′, 3‴, die Höhe aber 120′ 5″; wie viel wird der Flächeninhalt betragen? Man ergänze die abgängigen Zahlen durch Nullen, und multiplicire, wie gewöhnlich.

34003‴
12050

1700150
680060
34003

40973′61″50‴

Da hier Quadratschuhe, Zolle und Linien entstehen, so werden von dem Producte, rückwärts angefangen, zwey und zwey Ziffer abgeschnitten.

Durch die Division zweyer Quadratflächen findet man, wie oft eine in der andern enthalten ist. Man will z. B. wissen, wie oft 20□′, 24□″

in 300□′, 30□″ enthalten sind. Man ergänze die abgängigen Zahlen durch Nullen; so erhält man folgenden Ansatz:

3000030‴	$14\frac{160430}{202400}$ mal.
2024 00	
−9760	
2024	
8096	
1664	

Manchmal geschieht es, daß eine Quadratzahl durch eine Linie dividirt wird, wo denn der Quotient ebenfalls eine Linie gibt, nämlich diejenige, welche mit der bekannten multiplicirt, die gegebene Quadratzahl hervor bringt.

Beyspiel. Es sollen 4325□′ durch eine Linie von 136′, 5″ dividirt werden.

4325′00′	31′, 6″
1365	
4095	
−2300	
1365	
−9350	
1365	
8190	
1160	

215. Die Berechnungen im neuen französischen Maße sind von denen des zehntheiligen Schuhmaßes nicht unterschieden. Denn da der Metre in 10 Theile, und jeder derselben wieder in 10 andere abgetheilt ist; so braucht man beym

Digitized by Google

Längenmaße, wenn man kleinere Theile in größere verwandeln will, nur immer, rückwärts angefangen, Eine Ziffer abzuschneiden. Z. B. wie viel Metres geben 2345 Centimetres? Man schneide die Zahlen 5 und 4 ab; so hat man 23, 4, 5, das ist: 23 Metres, 4 Decimetres und 5 Centimetres, wovon man, wie bey dem Schuhmaße, die Metres mit einem Striche, die Decimetres mit zwey, die Centimetres mit drey, und die Millimetres, wenn einige vorhanden sind, mit 4 Strichen bemerken könnte: 23′, 4″, 5‴.

Bey der Anwendung der vier Rechnungsarten werden wieder überall die abgängigen Klassen, wie bey dem zehntheiligen Schuhmaße ersetzt. Es sollen z. B. 20 Metres, 7 Decimetres und 8 Centimetres zu 9 Metren und 5 Centimetren addirt werden; so ist der Ansatz folgender:

20′	7″	8‴
9	0	5
Summe: 29′	8″	3‴

das ist: 29 Metres, 8 Decimetres und 3 Centimetres.

216. Nimmt man den Metre nach bayerischem Maße bloß zu 3′ 5″ mit Hinweglassung der Linien und der 4 Punkte; so geben 12 Metres 41 bayerische Schuh, wodurch man leicht eine Anzahl von bayerischen Schuhen in Metres, und eine Anzahl von Metren in bayerische Schuhe verwandeln kann.

Digitized by Google

217. Das neue französische Quadratmaß in Metren ist eben so wenig von dem zehntheiligen Quadratmaß in Schuhen, Zollen und Linien unterschieden. Denn es enthält der Quadratmetre, weil das Maß zehntheilig ist, 100 Quadratdecimetres, der Quadratdecimetre 100 Quadratcentimetres, und dieser 100 Quadratmillimetres. Folglich müssen auch hier, wenn man Kleineres zu Größerem machen will, rückwärts angefangen, immer zwey und zwey Ziffer abgeschnitten, und die abgängigen Klassen mit zwey Nullen ergängt werden, wie dieses der Fall bey der Quadratrechnung des zehntheiligen Schuhmaßes ist. Will man z. B. 40 Quadratmetres, 17 Decimetres und 23 Centimetres von 62 Quadratmetern und 6 Quadratcentimetren abziehen; so kommt die Rechnung auf folgende Art zu stehen:

62 00 06
40 17 23

Rest: 21'82"83"'

das ist: 21 Quadratmetres, 82 Quadratdecimetres und 83 Quadratcentimetres; wozu man wieder die gewöhnlichen Quadratzeichen setzen kann.

Eine Fläche von 10 Metren Länge und Breite, folglich von 100 Quadratmetren, oder ein Quadrat-Decametre wird eine Are genannt; und eine andere von 100 Metren Länge und Breite, folglich von 10000 Quadratmetren, oder ein

Digitized by Google

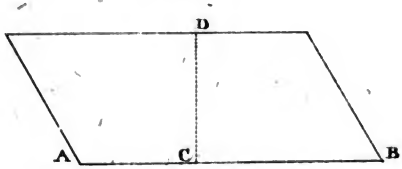
Quadrat-Hectometre heißt ein Hectoare, welches letztere das allgemeine Land- und Feldmaß, wie bey uns das Juchart oder Tagwerk ist. 33½ Ares geben ungefähr ein bayerisches Juchart oder 40000□′, und 3 Juchart ungefähr eine Hectoare.

218. **Anmerkung.** Weil die Benennungen der Theile des neuen französischen Maßes für den gemeinen Mann, der ihre Ableitung aus den fremden Sprachen nicht kennt, etwas schwer im Gedächtnisse zu behalten sind; so könnte man alles bloß in Metren ausdrücken, ohne auf die größern Abtheilungen, als Decametres, Hectometres ꝛc. Rücksicht zu nehmen. Denn 3 Hectometres, 4 Decametres und 6 Metres machen im Ganzen 346 Metres aus. Bey kleineren Theilen des Metre, als Decimetre, Centimetre ꝛc. könnte man die Benennungen ein Zehntheil, ein Hunderttheil, und ein Tausendtheil eines Metre gebrauchen. Die Zahl 364′, 5″, 8‴, 9⁗ hieße also 364 Metres, 5 Zehntheile, 8 Hunderttheile und 9 Tausendtheile eines Metre. Bey der Quadratrechnung fände das Nämliche Statt, und die Zahl 642□′, 13□″, 24□‴ würde bequemer durch 642 Quadratmetres, 13 Zehntel und 24 Hundertel ausgedrückt, welches im Deutschen das Nämliche, wie die obigen fremden Benennungen, bedeutet.

Digitized by Google

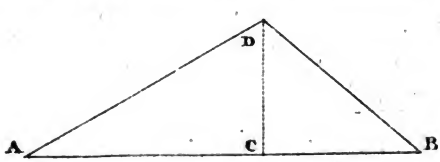
219. Da bey den gewöhnlichen Vermessungen die kleinsten Theile, wie die Linien, manchmal auch die Zolle, und bey dem französischen Maße die Tausend- und Hunderttheile auf dem verjüngten Maßstabe wegen ihrer Kleinheit nicht mehr abgenommen werden können: so bleiben sie größtentheils ganz hinweg, welches die Rechnungen um vieles erleichtert.

Nach diesen Beyspielen und Bemerkungen wollen wir wieder zu der Berechnung der übrigen Flächen zurück kehren.



220. Aufgabe. Den Flächeninhalt einer Raute zu finden.

Da jede Raute in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe verwandelt werden kann; so gibt auch hier die Grundlinie **AB**, multiplicirt mit der Höhe **CD**, den Flächeninhalt.



Digitized by Google

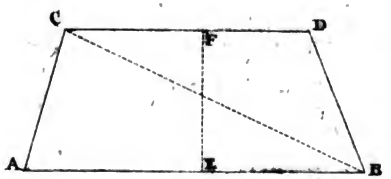
221. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Dreyeckes zu berechnen.

Da die Dreyecke Hälften von Parallelogrammen sind; so wird entweder die ganze Grundlinie **AB** mit der halben Höhe **CD**, oder die ganze Höhe **CD** mit der halben Grundlinie **AB** multiplicirt, oder auch die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt.

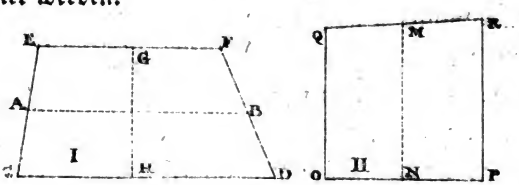
222. **Anmerkung.** Bey kleinen Flächen, die nicht aufgezeichnet, sondern gleich auf dem Felde ausgerechnet werden, ist es nothwendig, außer der Grundlinie auch die Höhe besonders zu messen. Bey großen Flächen aber, wovon ein ordentlicher Plan aufgenommen wird, fället man in der Zeichnung aus der Spitze der Figur durch feine Linien Perpendikel auf die Grundlinie, sucht von beyden die Länge auf dem verjüngten Maßstabe, und berechnet darnach die Figur. Die gefällten Perpendikel werden nach vollendeter Rechnung, weil sie nur Hülfslinien sind, wieder weggelöscht. Hieraus ergibt sich, daß man, um sich nicht großen Unrichtigkeiten auszusetzen, die verschiedenen Linien in der Zeichnung mit der größten Genauigkeit und Reinheit ausführen müsse.

223. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes zu finden.

Digitized by Google



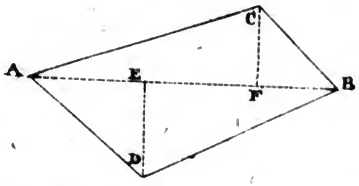
Man kann dieſes in zwey Dreyecke zertheilen, und als ſolche berechnen. Da aber die Dreyecke wegen der Parallelen gleiche Höhe haben; ſo können auch die beyden Parallellinien **AB** und **CD** addirt und mit der halben Höhe **EF** multiplicirt werden. Eben ſo gibt auch die ganze Höhe **EF** mit dem halben Theile der beyden Parallellinien den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes. Laſſen ſich die Linien nicht ohne Reſt in zwey gleiche Theile zertheilen; ſo können auch die Parallellinien **AB** und **CD** addirt, mit der ganzen Höhe **EF** multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt werden.



224. Zieht man in einem Paralleltrapeze eine Linie **AB** in gleicher Entfernung mit **CD** und **EF** parallel, ſo iſt **AB**, multiplicirt mit **GH**, der Flächeninhalt des Trapezes **CEFD**. Fig. **I**. Eben ſo iſt auch Fig. **II**. **MN**, multiplicirt mit **OP**, der Flächeninhalt des Trapezes **OPQR**;

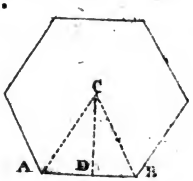
Digitized by Google

weil die beyden Trapezen, gleichsam als in ein Rechteck verwandelt, berechnet werden können.



225. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Trapezoiden zu finden.

Man berechnet entweder die beyden Dreyecke **ACB** und **ADB** einzeln, oder addirt die beyden Höhen derselben **CF** und **DE**, und multiplicirt sie mit der gemeinschaftlichen halben Diagonallinie **AB**.

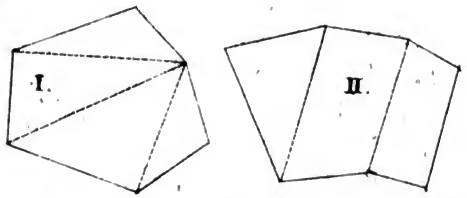


226. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes zu finden.

Da die regelmäßigen Vielecke in lauter gleiche Dreyecke zerfällt werden können; so darf nur ein einziges **ABC**, wovon **AB** die Grundlinie, und **CD** die Höhe ist, ausgerechnet, und das Product mit der Anzahl der Seiten multiplicirt werden. Man kann das Vieleck auch als in ein Dreyeck verwandelt betrachten, und die halbe

Digitized by Google

Höhe CD mit der Summe der Seiten multipliciren.



227. **Aufgabe.** Unregelmäßige Vielecke auszurechnen.

Dieſe können entweder in lauter Dreyecke, wie Fig. I., oder in lauter Trapezen, wie Fig. II. zertheilt, als ſolche berechnet, und ihr Inhalt in eine Summe gebracht werden.

228. **Aufgabe.** Den Inhalt einer Kreisfläche zu finden.

Da die Kreisfläche in ein Dreyeck verwandelt werden kann, wovon der Umkreis die Grundlinie, und der Halbmeſſer die Höhe iſt; ſo multiplicirt man den ganzen Umkreis mit der Hälfte des Halbmeſſers, oder den ganzen Halbmeſſer mit der Hälfte des Umkreiſes. Iſt eines von dieſen beyden Stücken nicht bekannt; ſo muß ſelbes nach Seite 64 bis 76 geſucht werden. Es hält z. B. der Durchmeſſer 12 Schuh, wie groß wird der Flächeninhalt ſeyn? Man ſuche zuvor den Umkreis; ſo wird die ganze Rechnung auf folgende Art angeſetzt:

Digitized by Google

x′ Umkr. ? 12′ Durchm.
100′ D. 314′ U.

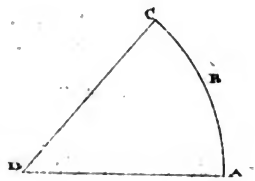
314
12
628
314
3768 Umkreis.
3 Hälfte des Halbm.
113′04″ Quadratinhalt der Kreisfläche.

Würde man in dem obigen Beyspiele den Durchmesser 12 mit 3 multipliciren, so entstände die Zahl 36; da nun der Halbmesser, welcher 6′ beträgt, mit sich selbst multiplicirt, ebenfalls 36 gibt; so erhält man den Flächeninhalt weit bequemer, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Zahl 314 multiplicirt, und die zwey letztern Ziffern wegen der Division mit 100 abschneidet, die dann beym zehntheiligen Schuhmaße die Quadratzolle oder Quadratlinien geben. Im vorhergehenden Beyspiele ist der Halbmesser 6, sein Quadrat 36, welches, mit 314 multiplicirt, den obigen Flächeninhalt 113□″ 04□″ gibt.

Läßt sich der Durchmesser nicht bequem in zwey Halbmesser zertheilen, so kann man auch das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multipliciren, das Product aber mit 4 di-

Digitized by Google

vidiren, und die letzten zwey Ziffern abschneiden. Der Durchmesser wäre z. B. 7′, so ist sein Quadrat 49, dieses, mit der Zahl 314 multiplicirt, und mit 4 dividirt, gibt 38□′ 46¼□″, zum Flächeninhalte.



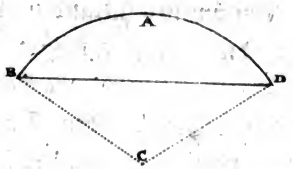
229. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes zu finden.

Bevor man dieses zu berechnen im Stande ist, muß man wissen, den wievielten Theil eines Kreises der Ausschnitt enthalte, welches man aus dem Bogen desselben erkennen kann. Der Bogen des Ausschnittes **ABC** halte z. B. den sechsten Theil des ganzen Kreises in sich, so berechnet man zuvor die ganze Kreisfläche, und dividirt das Product mit 6, wodurch man den Flächeninhalt des Kreisausschnittes bekommt.

Ist der Bogen eines Ausschnittes in Graden gegeben, so wird der Flächeninhalt des Kreises mit der Anzahl der Grade multiplicirt, und durch 360 dividirt. Z. B. der Bogen **ABC** halte 40°, der Flächeninhalt des Kreises sey 4260□′; so gibt diese Zahl, mit 40 multiplicirt, 170400, und,

Digitized by Google

durch 360 dividirt, $473\frac{1}{3}$□′ als den Flächeninhalt des Ausschnittes **ABCD**.



230. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden.

Man berechne zuvor den Kreisausschnitt **ABCD**, dann das Dreyeck **CDB**, und ziehe das letztere von dem ersteren ab; so bleibt der Rest für den Abschnitt **BAD**.

231. **Anmerkungen.** Ist in einem Dreyecke oder Parallelogramme der Flächeninhalt und die Grundlinie bekannt; so kann die Höhe durch die Division gefunden werden, weil der Flächeninhalt aus der Multiplication dieser beyden, nämlich der Grundlinie mit der Höhe, besteht. Eben so erhält man auch die Grundlinie, wenn der Flächeninhalt und die Höhe gegeben sind. Es halte z. B. die Grundlinie eines Parallelogramms 60′, der Flächeninhalt aber 1200□′; so bekommt man durch die Division mit 60 die Zahl 20, welches die Höhe des Parallelogramms gibt.

232. Ist die Figur ein Dreyeck, so wird mit der halben Grundlinie dividirt, wo dann ebenfalls die Höhe zum Vorscheine kommt.

Digitized by Google

233. Wird der Flächeninhalt eines Kreises, und der Halb- oder Durchmesser gegeben, so kann der Umkreis, und ist dieser bekannt, der Halb- und Durchmesser gefunden werden, weil das Product durch die Division in diejenigen Factoren zerfällt wird, aus welchen es entstanden ist. Hat man weder den Durchmesser noch den Umkreis, sondern nur den Flächeninhalt; so kann dieser mit 100 multiplicirt, und durch 314 dividirt werden, wodurch man das Quadrat des Halbmessers erhält, aus welchem, um den eigentlichen Halbmesser zu bekommen, die Quadratwurzel ausgezogen werden muß.

234. Will man was immer für eine Figur in ein Quadrat verwandeln, so darf man nur den Flächeninhalt derselben ausrechnen, ihn als ein Quadrat betrachten, und die Quadratwurzel ausziehen, wodurch man die Seite des Quadrates erhält.

235. Eben so kann auch jede Figur in eine Kreisfläche verwandelt werden, wenn man ihren Inhalt als eine Kreisfläche betrachtet und nach obiger Art den Halbmesser sucht.

236. Die Umfänge (Perimeter) von Figuren, die einen gleichen Flächeninhalt haben, können sehr von einander unterschieden seyn. Denn betrachtet man ein Quadrat von 400′ Flächeninhalt; so hat eine Seite 20′ und alle

Digitized by Google

vier Seiten 80′. Vergleichet man damit ein Parallelogramm, wo die Grundlinie 40′, die Höhe 10′ hält, welches ebenfalls 400□′ gibt, so halten die zwey längern Seiten 80′, die zwey kürzern 20′, folglich der ganze Umfang 100′.

Vergleicht man ein Dreyeck, oder eine Raute mit einem Quadrate von gleichem Flächeninhalte, so wird man finden, daß das Quadrat allemal den kleinsten Umfang gibt, und daß die übrigen Figuren immer einen kleinern haben, je mehr sie sich der Gleichheit der Linien und Winkel, und dem Regelmäßigen nähern.

Unter den regelmäßigen Vielecken hat das Unendlicheck oder die Kreisfläche bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang, und die übrigen einen immer kleinern, je mehr sie sich dem Kreise nähern, oder je mehr sie Seiten haben.

Diese Betrachtungen kann man sich bey Gebäuden, wo es bloß auf den Raum ankommt, wohl zu Nutzen machen, und dadurch ein Beträchtliches an Material und Arbeitslohn ersparen. Nicht ohne Bewunderung bemerkt man, sagt ein gewisser Schriftsteller, bey den Bienen, daß sie für ihre Honigbehältnisse das regelmäßige Sechseck wählen, welches ihrem Inhalte nach unter allen Figuren, die bey ihrer

Digitized by Google

Zusammensetzung keinen Zwischenraum lassen, die größte ist.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, und ihren Verhältnissen.

237. Erklärungen. Aehnlich sind alle Dinge, die durch kein anderes Merkmahl, als durch ihre Größe unterschieden sind. Um diese Eigenschaft zu haben, muß in beyden Figuren, von welchen man eine Aehnlichkeit fordert:

1. die nämliche Anzahl von Seiten vorhanden seyn;

2. müssen in beyden Figuren die Winkel einander gleich seyn, und in einerley Ordnung auf einander folgen;

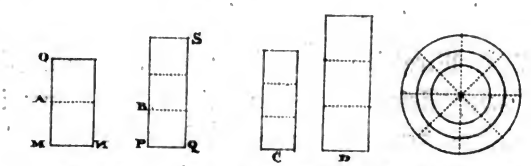
3. müssen die gleichnamigen Seiten, oder diejenigen, die gleichen Winkeln gegenüber stehen, mit einander im Verhältnisse seyn.

Nur mit diesen drey Bedingnissen werden sich die Figuren in Nichts, als in ihrer Größe unterscheiden.

Nach diesen Begriffen sind alle Quadrate, alle gleichseitige Dreyecke, alle rechtwinklicht-gleichschenklichte Dreyecke, und alle regelmäßigen Vielecke von gleich vielen Seiten an und für sich einander ähnlich.

Digitized by Google

Bey Vierecken und regelmäßigen Vielecken hat man wohl Acht zu geben, ob die gleichnamigen Seiten mit einander im Verhältnisse stehen, das ist: ob die Grundlinie des einen eben so oft in seiner Höhe enthalten sey, als die Grundlinie des andern in der seinigen.

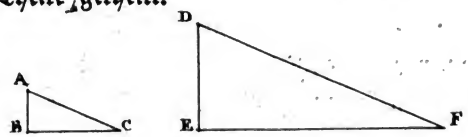


So ist z. B. das kleine länglichte Viereck **A** dem größern **B** nicht ähnlich, weil die Grundlinien nicht mit den Höhen in gleichem Verhältnisse stehen; denn die Grundlinie des kleinen Vierecks **MN** ist in der Höhe **MO** nur zweymal, die Grundlinie des größern aber **PQ** in ihrer Höhe **QS** dreymal enthalten. Hingegen ist das Viereck **C** dem Vierecke **D** ähnlich, weil sowohl in einem, als dem andern die Grundlinie dreymal in der Höhe enthalten ist.

Zwey Kreise sind einander ähnlich, weil der Halb- oder Durchmesser des kleinern eben so oft in seinem Umkreise enthalten ist, als der Halb- oder Durchmesser des größern in dem seinigen, und beyde Kreise in nichts, als in ihrer Größe unterschieden sind. Theilt man in concentrischen, das ist, in solchen Kreisen, die aus einem Mittelpunkte beschrieben sind, was immer für einen,

Digitized by Google

in gleiche Theile; so sind auch alle übrigen durch die Verlängerung der Halbmesser in eben so viele gleiche Theile getheilt.



238. Vergleicht man in zwey ähnlichen Figuren zwey Seiten der einen mit den gleichnamigen Seiten der andern; so erhält man allemal eine geometrische Proportion, in welcher aus drey bekannten Theilen der vierte unbekannte kann gefunden werden. Ist z. B. in zwey ähnlichen rechtwinklichten Dreyecken die Höhe des kleinern **AB** in der Grundlinie **BC** eben so oft enthalten, als die Höhe des größern Dreyeckes **DE** in der Grundlinie **EF**; so verhält sich **AB** zu **BC**, wie sich verhält **DE** zu **EF**, welches als eine geometrische Proportion auf folgende Art angesetzt wird.

$$AB : BC = DE : EF.$$

Ist **AB** in **BC** zweymal enthalten, so muß auch **DE** in **EF** zweymal enthalten seyn. Hält **AB** 2′, **BC** 4′ und **DE** 6′; so muß **EF** 12′ halten, weil 2 in 4 zweymal, und 6 in 12 ebenfalls zweymal enthalten ist: folglich $2 : 4 = 6 : 12$. Die vordern zwey Glieder haben also allemal den nämlichen Quotienten, wie die hintern zwey.

Digitized by Google

239. In einer jeden geometrischen Proportion ist das Product, welches durch die Multiplication der äußern zwey Glieder entsteht, gleich dem Producte der innern zwey.

Es ist demnach in der obigen Proportion:

$$AB \times EF = BC \times DE$$

in Zahlen $2 \times 12 = 4 \times 6$

oder $24 = 24.$

240. Sind in einer geometrischen Proportion drey Glieder bekannt, so kann das vierte gefunden werden, wenn man das Product der innern zwey durch eines der äußern zwey Glieder dividirt; oder wenn das Product der äußern mit einem der innern dividirt wird.

Es sey also in der obigen Proportion die Grundlinie des größern Dreyecks EF unbekannt, so ist:

$$AB : BC = DE : EF$$
$$AB \times EF = BC \times DE$$
$$EF = \frac{BC \times DE}{AB}$$

Mit den obigen Zahlen ausgedrückt, wo die unbekannte Zahl x genannt wird:

$$2 : 4 = 6 : x$$
$$2 \times x = 4 \times 6$$
$$x = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Ist die Grundlinie bekannt, so wird auf die nämliche Art die Höhe gefunden. Es halte z. B.

Digitized by Google

die kleinere Grundlinie 6′, die kleinere Höhe 5′, die größere Grundlinie aber 40′; wie viel wird die Höhe betragen?

$$6' : 5' = 40' : x$$
$$6 \times x = 40 \times 5 = 200$$
$$x = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3} \text{ Schuh.}$$

241. Da sowohl die Ketten- oder Resische Regel, als die Regel Detri nichts anders als eine geometrische Porportion unter einem andern Ansatze vorstellt; so läßt sich das obige Beyspiel auch auf diese zwey Arten ausrechnen. Nach dem Kettensatze:

x′ Höhe	40′ Grundlinie
6′ Gr.	5′ H.

Antw. $33\frac{1}{3}$′.

Nach der Regel Detri:

6′ 5′ 40′?

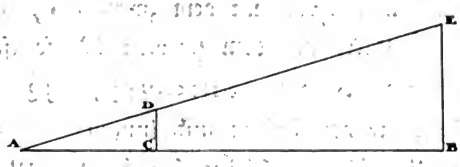
Antw. $33\frac{1}{3}$′.

242. **Aufgabe.** Die Höhe eines Baumes oder andern Gegenstandes aus seinem Schatten zu messen.

Man stecke einen Stab senkrecht in die Erde, und messe sowohl die Höhe, als den Schatten desselben; eben so messe man auch den Schatten des Baumes: so läßt sich nach der obigen Art die Höhe desselben durch Rechnung finden; weil man durch den Schatten die zwey Grundlinien recht-

Digitized by Google

winklichter Dreyecke, und durch die Höhe des Stabes eine Höhe erhält, wodurch auch die unbekannte Höhe gefunden wird.



243. Will man die obige Aufgabe durch Zeichnung, und den verjüngten Maßstab auflösen, so macht man eine gerade Linie **AB**, setzt die Länge des kleinern Schattens nach dem verjüngten Maße von **A** nach **C**, die Höhe des Stabes von **C** nach **D** senkrecht; die Länge des größern Schattens von **A** nach **B**, und zieht auf **B** eine unbestimmte senkrechte, so wird diese, wenn man **AE** zieht, in einem bestimmten Punkte **E** durchschnitten, und **EB** auf dem verjüngten Maßstabe gefunden werden. Hierin liegt auch der Grund der obigen Ausmessung einer Höhe mit zwey Stangen. Aus dem, was bisher gesagt wurde, erhellt, daß, wenn in was immer für zwey ähnlichen Figuren drey Stücke gegeben sind, das vierte durch Rechnung sich finden läßt.

244. Die geometrische Proportion bleibt so lange, als die Producte der äußern zwey Glieder den Producten der innern zwey gleich

Digitized by Google

ſind; daher ſich die Glieder auf verſchiedene Art verändern laſſen. Nimmt man z. B. die obige Proportion $2 : 4 = 6 : 12$, und multiplicirt die zwey erſten Glieder mit dem zweyten 4, und die letzten ebenfalls mit dem zweyten 12; ſo iſt

$$2 \times 4 : 4 \times 4 = 6 \times 12 : 12 \times 12$$

die Producte der äußern und innern;

$$2 \times 4 \times 12 \times 12 = 4 \times 4 \times 6 \times 12$$

nach vorgenommener Multiplication:

$$1152 = 1152;$$

und alſo das Verhältniß richtig.

Eben ſo können auch die Glieder einer geometriſchen Proportion durch die Glieder einer andern Proportion der Ordnung nach multiplicirt werden, ohne daß das Verhältniß aufgehoben wird, z. B.

$$2 : 4 = 6 : 12$$
$$3 : 6 = 4 : 8$$
$$2 \times 3 : 4 \times 6 = 6 \times 6 : 12 \times 8$$
$$2 \times 3 \times 12 \times 8 = 4 \times 6 \times 6 \times 4$$
$$576 = 576.$$

Werden die erſten oder letzten zwey Glieder einer geometriſchen Proportion mit einer gleichen Größe multiplicirt, oder dividirt; ſo wird auch dadurch das Verhältniß nicht geſtört. Das nämliche geſchieht, wenn die Multiplication oder Diviſion von gleichen Größen in beyden Gliedern weggelaſſen wird; denn in beyden Fällen

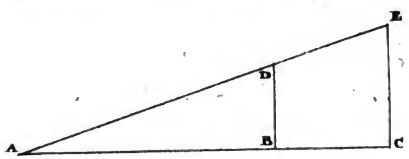
Digitized by Google

bleiben die Producte der äußern zwey Glieder gleich den Producten der innern zwey. Z. B.

$$3\times2 : 6\times 2 = 8 : 18$$
$$3\times2\times18 = 6\times2\times9$$
$$108 = 108.$$
$$\tfrac{6}{2} : \tfrac{12}{2} = 9 : 18$$
$$\tfrac{6}{2}\times 18 = \tfrac{12}{2}\times 9$$
$$3\times 18 = 6\times 9$$
$$54 = 54.$$

Läßt man die Multiplication oder Division in beyden Beyspielen hinweg, so ist

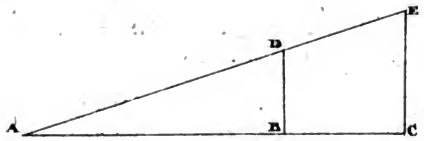
im ersten:	im zweyten:
$3 : 6 = 9 : 18$	$6 : 12 = 9 : 18$
$3\times18 = 6\times 9$	$6\times18 = 12\times9$
$54 = 54$	$108 = 108.$



245. Lehrsatz. Wenn in einem Dreyecke eine Linie mit einer Seite parallel gezogen wird; so sind sowohl die Abschnitte unter sich, als mit den ganzen und abgeschnittenen Seiten im Verhältnisse.

Beweis. Da die Winkel bey **D** und **B** wegen der Parallelen die nämlichen bleiben, wie bey **C** und **E**, so entstehen durch den Parallelschnitt zwey ähnliche Dreyecke; wo die gleichnamigen Seiten mit einander im Verhältnisse

Digitized by Google



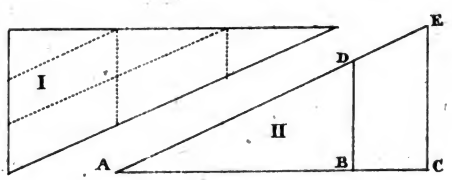
stehen. Es ist also:

AB : AC = AD : AE

und **AB : AC = BD : CE.**

Wird **BD** nach **A** parallel fortgerückt, so wächst **DE** im Verhältnisse um eben so viel, als **BC**; und **AB** wird im Verhältnisse um eben so viel kürzer, als **AD**. Es ist also:

AB : BC = AD : DE.



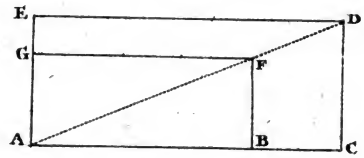
246. Zusatz. Theilt man also in einem Dreyecke was immer für eine Linie in gleiche Theile, und zieht von denselben Parallellinien mit einer Seite; so wird auch die andere Seite in eben so viele gleiche Theile zertheilt. Dieß ist die Grundursache der obigen Aufgabe, Seite 19. Nro. 44: eine Linie in gleiche und ungleiche Theile zu zertheilen.

247. Zusatz. Weil die Linie **BD** mit den andern drey Linien des Dreyecks **AB**, **AE**, und

Digitized by Google

EC im Verhältniſſe ſteht; ſo wird ſie die vierte Proportionallinie genannt, und iſt eben ſo oft in CE enthalten, als AB in AC. Theilt man AC in gleiche Theile, und zieht mit EC Parallellinien; ſo iſt jede dieſer Parallelen eben ſo oft in CE enthalten, als der dadurch von AC abgeſchnittene Theil in der ganzen Linie AC.

Hierin liegt der Grund zu den Eintheilungen der verjüngten Maßſtäbe in ihre kleineren Theile, in Zolle und Linien.



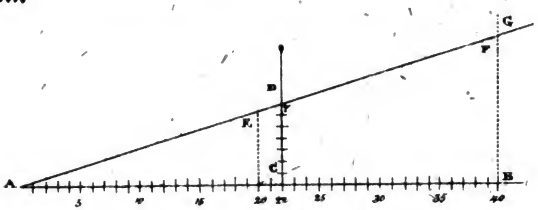
248. Aufgabe. Auf eine gegebene Grundlinie AB ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem gegebenen ACDE ähnlich iſt.

Man ziehe die Diagonallinie AD, und mache BF und FG parallel mit ihren gegenüber ſtehenden Seiten CD, und DE; ſo iſt ABFG ähnlich ACDE. Denn AD theilt das Viereck ACDE in zwey gleiche Dreyecke; daher die Seiten BF und FG mit den übrigen im Verhältniſſe ſtehen.

249. Anmerkung. Durch öfteres Nachdenken über eine bequeme Art, die Halb- und Durchmeſſer für eine beſtimmte Anzahl von Thei-

Digitized by Google

len, zum Gebrauche der Eintheilung des Räderwerkes in der Mechanik, abzunehmen; fiel mir von ungefähr folgendes bequeme und allgemeine Verfahren ein, das sich auf die obigen Proportionallinien gründet, und das sowohl für den gemeinen Arbeiter, der oft wenig im Rechnungswesen erfahren, sich mit allerley, manchmal nicht gar sichern Handgriffen forthelfen muß, als für den Zeichner mechanischer Werke von Nutzen seyn kann.



250. Aufgabe. Einen Proportional-Maßstab zu verfertigen, von welchem man die Halbmesser für eine bestimmte Anzahl von Theilen des Umkreises abnehmen kann.

Man theile auf eine gerade Linie **AB** ungefähr 40 bis 50 gleiche Theile von beliebiger Größe, und errichte bey 22 eine senkrechte Linie; so stellt die wagrechte **AC** den Umkreis, und die senkrechte **CD** den Durchmesser vor.

Will man nun den Durchmesser eines Kreises auf diesem Maßstabe abnehmen, welcher 40 Theile enthalten soll, wo einer von dem andern $3\frac{3}{4}$ Zoll entfernt wäre; so nimmt man nur die

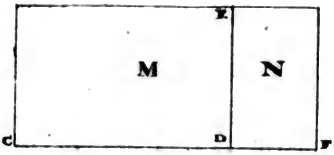
Digitized by Google

$3\frac{3}{4}$ Zoll in den Zirkel, trägt sie siebenmal auf die senkrechte Linie **CD**; zieht durch die Punkte **A 7** eine gerade Linie, und errichtet bey 40 oder 20 wieder eine senkrechte parallel mit **CD**: so werden diese die schiefe **ADG** bey **E** und **F** schneiden, und die bey 40 den Durchmesser, bey 20 aber den Halbmesser eines Kreises geben, auf welchem sich 40 Theile von $3\frac{3}{4}$ Zoll Entfernung auftragen lassen. Auf diese Weise erhält man durch eine einzige Querlinie die Halbmesser aller Kreise von gleicher Weite, oder gleich weiten Theilen am Umkreise.

Man könnte durch ein verkehrtes Verfahren auch, wenn der Durchmesser gegeben ist, die Größe Eines Theiles finden; allein dieses läßt sich bey einer großen Anzahl gleicher Theile besser durch Unterabtheilungen, und bey einer kleinern Zahl ungleicher Theile am leichtesten mechanisch durch Versuche mit dem Zirkel bewerkstelligen, wie wir bereits an einem andern Orte gehört haben.

Da die Räderwerke in der Mechanik nie gar zu groß werden können, so ist das Verhältniß von 7 : 22, worauf sich das obige Verfahren gründet, hinlänglich; besonders wenn man bedenkt, daß sich das Materiale unmöglich so genau bearbeiten läßt, daß dieser kleine Umstand einigen Einfluß haben könnte.

Digitized by Google



251. Lehrsatz. Die Flächeninhalte zweyer Parallelogramme verhalten sich wie die Grundlinien, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.

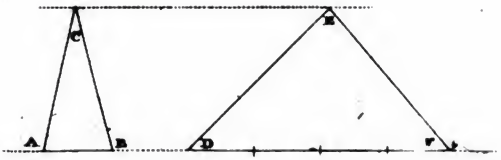
Beweis. Der Flächeninhalt von **M** ist gleich **CD × DE**; der Flächeninhalt von **N** ist gleich **DE × DF**. Es verhält sich also **M : N = CD × DE : DE × DF**. Läßt man in beyden Verhältnissen die Multiplication mit **DE** hinweg, welches nach Seite 139 Nro. 244 ohne Nachtheil geschehen kann; so bleibt **M : N = CD : DF**.

Sind die Grundlinien gleich, so verhalten sich die Flächeninhalte wie die Höhen, welches sich auf die nämliche Art erweisen läßt.

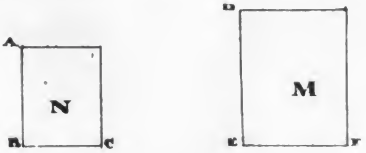
Ist also in der obigen Figur **DF** in **CD** dreymal enthalten, so ist der Flächeninhalt von **M** dreymal so groß, als der von **N**; oder **N** kann dreymal auf **M** gelegt werden.

252. Zusatz. Da die Dreyecke Hälften von Parallelogrammen sind, so verhalten sich die Flächeninhalte derselben ebenfalls wie die Grund-

Digitized by Google



linien, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind. Das Dreyeck **ABC** ist in dem Dreyecke **DEF** viermal enthalten, weil die Grundlinie des erstern viermal in der Grundlinie des zweyten enthalten ist.



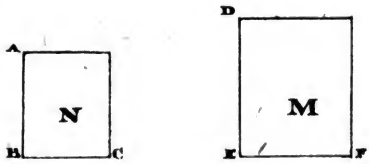
253. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden, oder gleichnamigen Seiten.

Beweis. Da die ähnlich liegenden Seiten mit einander im Verhältnisse stehen, so ist

$$AB : BC = DE : EF.$$

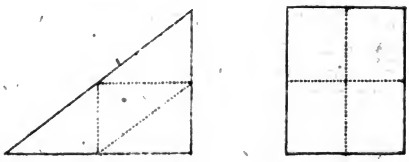
Multiplicirt man sowohl die Theile des ersten Gliedes mit seiner Grundlinie **BC**, als auch die des zweyten mit der Grundlinie **EF**, welches nach Seite 139, Nro. 244 ohne Schaden des Verhältnisses geschehen kann; so ist:

$$AB \times BC : BC \times CB = DE \times EF : EF \times EF$$



Da nun **AB**×**BC** den Flächeninhalt von **N** und **BC**×**BC** das Quadrat von **BC** gibt, und das nämliche auch bey **M** geschieht: so ist der Flächeninhalt von **N** zum Flächeninhalt von **M**, wie das Quadrat von **BC** zum Quadrate von **EF**, das ist, $N:M=BC^2:EF^2$. Weil sich nun Parallelogramme durch Diagonallinien in zwey gleiche Dreyecke zerfällen lassen, so gilt dieses auch von Dreyecken, und eben so von allen übrigen Figuren; indem sie sich alle in Dreyecke zertheilen, oder in solche verwandeln lassen.

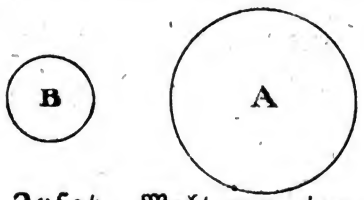
254. Zusatz. Aehnliche Kreisflächen verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.



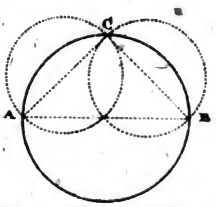
255. Zusatz. Theilt man in einem Dreyecke oder Vierecke die Seiten in zwey gleiche Theile, und verbindet sie mit Linien; so erhält man vier gleiche Dreyecke oder Vierecke, wo-

Digitized by Google

durch man sieht, daß sich die Flächeninhalte wie die Quadratzahlen ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten.



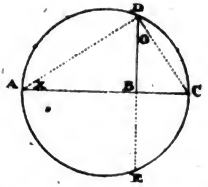
256. Zusatz. Macht man einen Kreis **A**, dessen Halbmesser noch so groß ist, als ein anderer **B**, so ist der Umkreis noch so groß, und der Flächeninhalt viermal so groß als **B**; weil die Linien im einfachen, die Flächeninhalte aber im vierfachen Verhältnisse, das ist, wie die Quadratzahlen mit einander stehen.



257. Zusatz. Weil sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser verhalten; so können sie eben so wie die Quadrate Nro. 197, 198 u. 199 verwandelt, verdoppelt, halbirt, zusammen addirt, und von einander abgezogen werden. Es ist also die Kreisfläche von dem Durchmesser **AB** eben so groß, als die des Durchmessers **AC**, und **CB** zusammen genommen. Ist **AC = CB**, so sind auch ihre Flä-

Digitized by Google

chen halb so groß, als die aus **AB**. Aehnlich regelmäßige Vielecke, und selbst ähnlich unregelmäßige können eben so behandelt werden, wenn man auf obige Art ihre ähnlich liegenden Seiten sucht.



258. Lehrsatz. So oft in einem Kreise eine senkrechte Linie **DB** auf den Durchmesser **AC** herunter gelassen wird; so ist diese die mittlere Proportionallinie zwischen **AB** und **BC**.

Beweis. Zieht man **AD** und **DC**, so sind die Dreyecke **ABD** und **DBC** einander ähnlich, weil beyde bey **B** rechte Winkel haben, und der Winkel **X** = **O** ist; denn **X** hat als ein Winkel an der Peripherie den halben Bogen **DC**, und **O** den halben Bogen **CE** zum Maße, welche einander gleich sind; weil die Sehne senkrecht auf den Durchmesser herunter gelassen wurde, und dieser die Sehne und den Bogen in zwey gleiche Theile zertheilt. Da also zwey Winkel in einem Dreyecke gleich sind zweyen Winkeln im andern; so ist auch der dritte als der Rest von 180° gleich dem dritten, und die Dreyecke einander ähnlich. Es verhält sich also **AB**:**DB**=

DB:BC. Sucht man die Producte der äußern und innern zwey Glieder; so ist **AB**, multiplicirt mit **BC**, gleich **BD**, multiplicirt mit **BD**, oder mit sich selbst. Es gibt also das erste ein länglichtes Viereck, und das zweyte ein Quadrat, welche vollkommen einander gleich sind.

Hierin liegt der Grund zu der Verwandlung S. 106, Nro. 196, eines Parallelogramms in ein Quadrat.

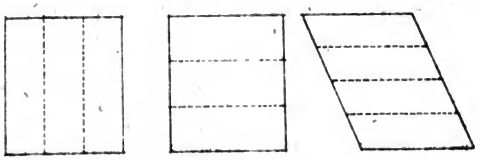
259. **Zusatz**. Da das Dreyeck **ADC** bey **D** einen rechten Winkel bildet, weil seine beyden Schenkel auf dem Durchmesser stehen; so gilt der obige Satz auch für jeden Perpendikel, welcher, in was immer für einem rechtwinklichten **Dreyecke**, aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse herunter gelassen wird.

260. **Zusatz**. Die aus der Spitze herabgelassene senkrechte wird auch die dritte Proportionallinie genannt, weil sie mit den beyden Theilen des Durchmessers **AB** und **BC** im Verhältnisse steht. Sucht man also zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie, so werden diese beyden in eine Linie zusammen gesetzt, aus ihrer Mitte ein halber Kreisbogen beschrieben, und auf ihrem Zusammenstoßungs-Punkte eine senkrechte bis an die Kreislinie gezogen, welche die mittlere Proportionallinie zwischen beyden ausmacht.

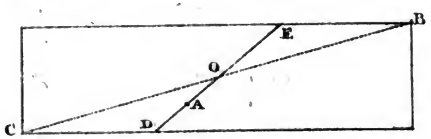
Digitized by Google

Von der Vertheilung der Flächen.

261. Aufgabe. Quadrate, länglichte Vierecke, und Rauten in gleiche Theile zu zertheilen.



Man theile zwey gegenüber stehende Seiten in gleiche Theile, und verbinde die Theilungs-Punkte mit geraden Linien; so entstehen durchaus gleiche Flächen.



262. Aufgabe. Ein Parallelogramm so in zwey gleiche Theile zu zertheilen, daß die Theilungslinie einen gewissen Punkt A durchschneide.

Man ziehe die Diagonallinie **BC**, theile sie bey **O** in zwey gleiche Theile, und ziehe durch den Punkt **A** und **O** eine gerade Linie **DE**; so ist diese nach Seite 54, Nro. 114 die Theilungslinie.

Digitized by Google

263. Aufgabe. Ein Paralleltrapez in gleiche Theile zu zertheilen.

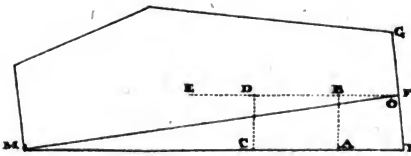
Man theile jede der parallelen Seiten in die verlangten gleichen Theile, und verbinde die Theilungspunkte mit Linien; so erhält man auch hier gleiche Flächeninhalte.

264. Aufgabe. Von einem Parallelogramme eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen abzuschneiden.

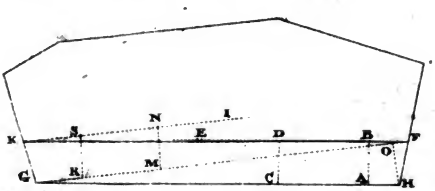
Man dividire mit der Grundlinie in die Anzahl von Quadratschuhen, welche man abschneiden will; so erhält man nach Seite 131, Nro. 231 die Höhe des abzuschneidenden Stückes, welches man auf **AB** und **CD** tragen, und die Theilungslinie **EF** ziehen kann.

265. Aufgabe. Eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen unter der Gestalt eines Dreyeckes abzuschneiden.

Digitized by Google



Man dividire mit der halben Grundlinie in die verlangte Anzahl von Quadratschuhen; so erhält man die Höhe des abzuschneidenden Dreyeckes. Diese Höhe setze man mit zwey Perpendikeln **AB**, und **CD** auf die Grundlinie **MN**, ziehe die Parallellinie **EF**; wo diese die Linie **GN** durchschneidet, zieht man die Theilungslinie **OM**, und das Dreyeck **MNO** wird den verlangten Flächeninhalt haben. Die Ursache dieses Verfahrens liegt in Seite 131, Nro. 231, und Seite 57, Nro. 117.

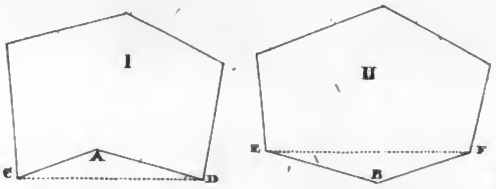


266. **Aufgabe.** Von einem unregelmäßigen Vielecke eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit der Grundlinie beynahe parallel ist.

Man dividire mit der ganzen Grundlinie in die gegebene Anzahl von Quadratschuhen,

Digitized by Google

so erhält man die Höhe eines Parallelogramms, welches man unter der Gestalt zweyer Dreyecke auf folgende Art aufträgt. Man setze die gefundene Höhe mit zwey Perpendikeln **AB** und **CD** auf **GH**, und zieht die Linie **EF**; aus dem Durchschnittspunkte **F** zieht man **FG**; so hat man die Hälfte des Parallelogramms. Man nimmt dann die Höhe des Dreyecks **FGH**, nämlich **HO**, und trägt sie mit zwey senkrechten **MN** und **RS** auf **GF**; zieht **IK**, und aus dem Durchschnittspunkte **K** die Linie **KF**: so ist diese die Theilungslinie, und beynahe mit **GH** parallel.



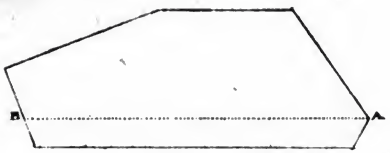
267. **Aufgabe.** Einen Theil von einem Vielecke abzuschneiden, das einen Winkel einwärts oder auswärts hat.

Man rechne das Dreyeck **A** Fig. **I.** zuvor aus, addire seinen Flächeninhalt zu der verlangten Anzahl von Quadratschuhen, und schneide die Summe beyder Theile auf der Linie **CD** nach der oben angezeigten Art ab.

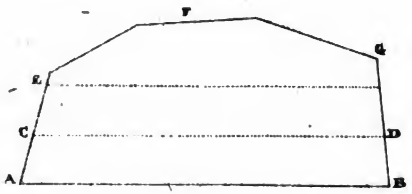
Hat das Vieleck einen Winkel auswärts, wie **B**, Fig. **II.**; so wird das Dreyeck **EFB** eben-

Digitized by Google

falls ausgerechnet, und von der abzuschneidenden Anzahl von Quadratschuhen abgezogen; der Rest aber auf der Linie **EF** aufgetragen.



Merkt man, daß die Theilungslinie über einen Winkel **A** hinauf steigen werde, so zieht man aus diesem eine Linie **AB** mit der Grundlinie parallel; berechnet das abgeschnittene Stück besonders, nimmt die Linie **AB** zur Grundlinie, und trägt den Rest von dieser aufwärts.



268. **Aufgabe.** Eine jede Figur in gleiche oder ungleiche Theile zu zertheilen.

Es soll das Vieleck **AEFGB**, welches 84000□′ enthält, in drey gleiche Theile getheilt werden; so erhält ein Theil 28000 □′. Man schneide also auf der Grundlinie **AC** einen Theil ab, welcher bis **CD** gehen soll; nehme **CD** zur Grundlinie, und schneide den zweyten Theil ab:

Digitized by Google

so wird der dritte übrig bleiben, welchen man zur Probe ausrechnen und sehen kann, ob die 28000□′ vorhanden sind oder nicht.

Man kann auch die ganze Figur gleich nach dem Augenmaße in 3 Theile zertheilen, einen jeden Theil besonders ausrechnen, und das Fehlende durch ein Dreyeck hinzu thun, oder das Ueberflüssige durch ein solches hinweg schneiden.

Soll ein Grundstück in ungleiche Theile getheilt werden; so fragt es sich, den wievielten Theil des Ganzen ein jeder bekommen soll. Z. B. es sollen 86450 ′ in drey Theile getheilt werden, wovon der Erste $\frac{1}{3}$, der Zweyte $\frac{1}{4}$, und der Dritte $\frac{1}{5}$ bekommen soll. Hier müssen die Brüche zuvor unter einerley Benennung gebracht, und zusammen addirt werden, wo sie sich in $\frac{47}{60}$ verwandeln. Da nun $\frac{47}{60}$ das ganze Stück von 86450□′ erhalten, so sucht man, wie viel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, und $\frac{1}{5}$ bekommt, welches nach der Gesellschafts-Rechnung leicht gefunden, und jedem der gehörige Antheil, auf eine der oben beschriebenen Arten, abgeschnitten wird.

Ist die Figur auf dem Papiere richtig abgetheilt, und man will die Gränzlinien der Theile auf dem Felde ausstecken; so suche man die Länge **AC** und **BD** auf dem verjüngten Maßstabe; lasse auf dem Felde von **A** nach **C**, und von **B** nach **D** eben so viele Schuhe abmessen, als man

auf dem Maßstabe gefunden hat, und schlage auf den Punkten C und D die Markpfähle. Ist die Linie CD sehr lange; so können auch von C nach D in gerader Richtung ein Paar Pfähle geschlagen, oder einsweilen kleine Gruben geöffnet werden. Auf die nämliche Art verfährt man auch mit den übrigen Theilungslinien.

269. Anmerkung. Außer diesen Aufgaben von Vertheilungen gibt es noch verschiedene Arten derselben, die man hier anzuführen für unnöthig findet, weil man die vorkommenden Fälle durch die bereits angezeigten mit hinlänglicher Genauigkeit aufzulösen im Stande ist.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

270. Erklärung. Die Quadratwurzel aus einer Zahl ausziehen heißt: diejenige Zahl ausfindig machen, welche, durch sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl hervor bringt. So ist die Quadratwurzel von 36 die Zahl 6, weil $6 \times 6 = 36$ ist. Diejenigen Zahlen, wovon sich die Wurzel nicht ohne Rest ausziehen läßt, sind keine vollkommenen Quadratzahlen, wie 12, 15, 20 ꝛc.

Digitized by Google

Das Quadrat einer einfachen Zahl kann aus nicht mehr, als zwey Ziffern bestehen, weil 10 als die erste Zahl von zwey Ziffern schon 100 zu ihrem Quadrate hat. Eben so kann das Quadrat einer Zahl von zwey Ziffern nicht mehr, als vier Ziffer enthalten, weil 100 schon 10000 zu ihrem Quadrate gibt. Ueberhaupt enthält keine Quadratzahl mehr, als die doppelte Anzahl von Ziffern ihrer Wurzelzahl.

271. Wenn man was immer für eine Zahl, z. B. 5 in zwey Theile, in 3 und 2, zertheilt; so wird das Quadrat dieser Zahl aus folgenden Producten bestehen: erstens aus dem Quadrate der ersten Zahl 3, zweytens aus dem Quadrate der zweyten Zahl 2, und drittens aus dem doppelten Producte, welches entsteht, wenn man die erste Zahl mit der zweyten multiplicirt. Es ist also das Quadrat von $3=9$, das Quadrat von $2=4$, und die Multiplication von $3\times2=6$. Dieses, doppelt genommen, $6+6=12$; folglich $9+4+12=25$, gleich dem Quadrate von 5. Aus dieser Zergliederung entstehen die folgenden, bey der Ausziehung der Quadratwurzel nöthigen Regeln, welche wir gleich, in einem Beyspiele angewandt, zeigen wollen.

Aufgabe. Die Quadratwurzel von der Zahl 178929 auszuziehen.

Digitized by Google

```
17,89,29 | 423
16       |
---------
 189
  82
 164
---------
 2529
  843
 2529
---------
```

Man theile die Ziffern von der Rechten zur Linken paarweise ab, bis auf die erste, welche bisweilen allein zu stehen kommt, und suche die Quadratwurzel von der ersten Abtheilung, 17, oder der nächst kleineren Quadratzahl 16, welche 4 ist. Diese setze man als einen Quotienten hinter den senkrechten Strich; das Quadrat davon aber, nämlich 16, unter die erste Abtheilung 17, und subtrahire, wie bey der Division. Zu der übrig gebliebenen Zahl setze die nächste Abtheilung 89 herunter, so erhält man 189. Als Divisor wird ferner das Doppelte von 4, nämlich 8, gesetzt; jedoch allemal so, daß die letzte Ziffer frey bleibt. Dividirt man 8 in 18, so ist der Quotient 2, welcher wieder zu 4 hinkommt. Die nämliche Zahl 2 setze man auch zum Divisor 8, und multiplicire 82 durch den Quotienten 2; so erhält man 164, welches, wie bey der Division, von 189 abgezogen wird. Zum Rest wird wieder 29 herab gesetzt, so entsteht

2529. Um den Divisor zu finden, verfährt man, wie bey der vorhergehenden zweyten Klasse. Man nimmt nämlich 42 doppelt, das ist, 84, und setzt sie so, daß wieder die letzte Ziffer 9 frey bleibt; dividirt 8 in 25, so entsteht der Quotient 3, welcher sowohl zu dem bereits gefundenen Quotienten, als auch unter die Ziffer 9 gesetzt wird. Multiplicirt man wieder den ganzen Divisor 843 mit 3; so erhält man 2529, welches, von der obern Zahl abgezogen, keinen Rest gibt. Der erhaltene Quotient 423 ist die gesuchte Wurzel. Wären noch mehrere Klassen vorhanden, so müßte immer auf die nämliche Art fortgefahren werden. Hieraus sieht man, daß nur bey der ersten Klasse die Wurzelzahl gesucht, und ihr Quadrat von der obern Klasse abgezogen, in der Folge aber allemal der doppelte Quotient zum Divisor genommen werden müsse.

272. Die Ursache dieses Verfahrens liegt in dem, was Seite 159, Nro. 271. ist gesagt worden.

Es ist nämlich in der ersten Zahl 17 das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten, sammt dem Reste 1. Die Wurzel dieses Quadrats macht also den ersten Theil der zu suchenden Wurzel aus. In dem Reste, und der dazu gesetzten Zahl muß noch das Quadrat des zweyten Theils, und das doppelte Product aus

Digitized by Google

dem ersten in den zweyten Theil verborgen liegen. Weil aber das Quadrat des zweyten Theiles in der letzten Ziffer steckt; so muß das doppelte Product in den ersten zweyen enthalten seyn. Dividirt man also die ersten zwey Ziffern durch den doppelten ersten Theil, so gibt der Quotient den zweyten Theil der Wurzel; weil durch die Division das Product in die nämlichen Factoren zerlegt wird, aus welchen es durch die Multiplication entstanden ist.

Fügt es sich, daß eine Zahl von der andern nicht kann abgezogen werden; so ist dieß ein Zeichen, daß man den Quotienten zu groß angenommen habe.

Ist das doppelte Product, oder der Divisor größer, als die Zahl, welche dividirt werden soll; so muß eine Nulle zum Quotienten gesetzt, und die nächste Klasse oder Abtheilung herunter genommen werden, wie man aus folgendem Beyspiele sehen kann.

```
 4,09,32 | 202
 4       |
 ------------
  -0932
    402
    804
 ------------
    128
```

273. Bleibt nach geschehener letzten Abziehung ein Rest übrig; so läßt sich die Wurzel nicht vollkommen ausziehen. Man kann aber dem Reste

Digitized by Google

zwey Nullen heysetzen, und den Werth desselben in Decimalen suchen, welches so oft wiederholt wird, als man es nöthig findet. Die erhaltenen Decimalen werden von den übrigen Zahlen durch einen kleinen Strich abgesondert. Wir wollen hier das obige Beyspiel fortsetzen:

4,09,32	202,316
4	
-0932	
402	
804	
- 12800	
4043	
12129	
—67100	
40461	
2663900	
404626	
2427756	
-236144	

Die erste Decimalzahl bedeutet die Zehntheile, die zweyte die Hunderttheile, und die dritte die Tausendtheile eines Ganzen. Ist in der gegebenen Quadratzahl von Quadratschuhen die Rede; so bedeutet die erste Decimalzahl zehntheilige Zolle, die zweyte zehntheilige Linien, und die dritte zehntheilige Puncte. Eine größere Genauigkeit wird selten nöthig seyn.

Digitized by Google

274. Soll aus einem Bruche die Quadratwurzel ausgezogen werden; so muß dieses sowohl bey dem Zähler, als Nenner insbesondere geschehen.

275. Die Probe, ob die Wurzel richtig ausgezogen ist, wird gemacht, wenn man den erhaltenen Quotienten mit sich selbst multiplicirt, und den übrig gebliebenen Rest dazu addirt, wo die gegebene Quadratzahl wieder hervor kommt.

276. Hier noch ein Paar Beyspiele zur Uebung und Anwendung:

Beyspiel. Die Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyeckes halte 30 Schuh, die Höhe 24; wie lang wird die Hypotenuse seyn?

Weil das Quadrat der Hypotenuse eben so groß ist, als das Quadrat der beyden Katheten zusammen genommen; so erhebt man 30 und 24 zu Quadraten, und addirt sie, wodurch man das Quadrat der Hypotenuse bekommt, aus welchem, um die wirkliche Länge dieser Linie zu erhalten, die Quadratwurzel ausgezogen wird.

Es gibt also 30 das Quadrat 900, und 24 das Quadrat 576; beyde zusammen addirt 1476□′, wovon man die Wurzel auf folgende Art auszieht:

Digitized by Google

14,76	38′,4″,1‴ Länge der Hy-
9	potenuse.
-5 76	
68	
5 44	
-3200	
764	
3056	
-14400	
7681	
6719	

Beyspiel. Der Durchschnitt einer kreisförmigen Röhre halte im Lichten 16■″ 45■‴ Decimalmaß, wie groß wird der Durchmesser seyn?

Weil nach Seite 129, Nro. 228 die Kreisfläche aus dem Quadrate des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 4 und 100, besteht; so muß, um das Quadrat des Durchmessers zu erhalten, die gegebene Fläche nach Seite 132, Nro. 233 durch 314 dividirt, und mit 4 und 100 multiplicirt werden. Damit man also den Durchmesser sehr genau erhalte, so setze man zur gegebenen Zahl noch zwey Nullen hinzu, wodurch man Punkte bekommt, nämlich 164500■‴″. Diese, durch 314 dividirt, geben 523, und durch 4 und 100 multiplicirt, 209200■‴″, oder das Quadrat des Durchmessers; woraus, um den eigentlichen Durchmesser zu finden, die Quadratwurzel auf folgende Art ausgezogen wird:

Digitized by Google

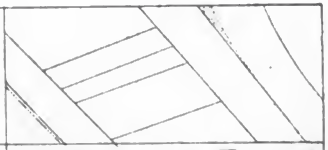
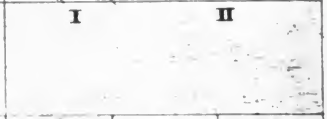
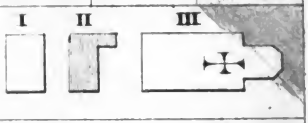
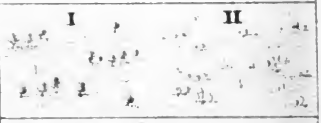
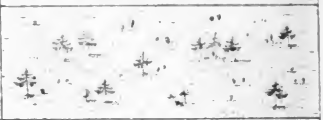
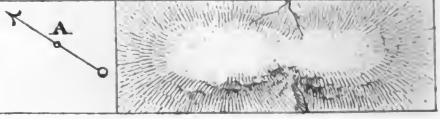
20,92,00	4″, 5‴, 7⁗, Länge des
16	Durchmessers.
-4 92	
85	
4 25	
-6700	
907	
6349	
-351	

Von der Zeichnung geometrischer Plane.

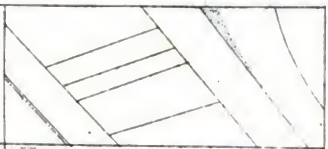
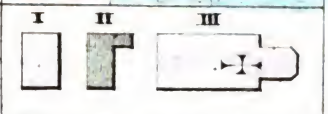
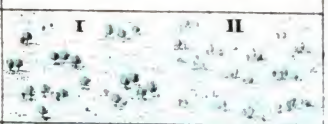
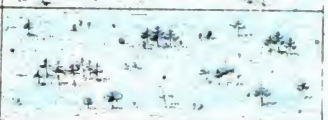
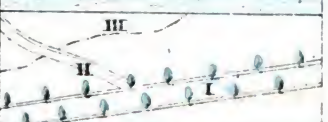
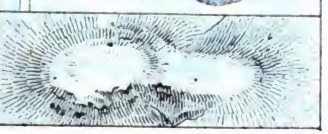
277. Der geometrische Plan ist die Aufzeichnung einer Fläche mit seinen Zugehörungen nach dem verjüngten Maßstabe. Da es bey der Ausmessung der Flächen nur auf die Länge und Breite ankommt; so werden auch die Gebäude und andere körperliche Gegenstände nur nach ihrer Grundfläche dargestellt. Die beygesetzte Tafel zeigt die Darstellung der verschiedenen Gegenstände, die in einem Plane vorkommen können. Der Anfänger soll sich in der Zeichnung derselben so lange üben, bis er sich darin eine gewisse Fertigkeit erworben hat. Diejenigen, die in der Landschaftszeichnung nur einige Fortschritte gemacht haben, werden in der Planzeichnung keine Schwierigkeit finden.

Digitized by Google

Nach Seite 166.

Felder.	
I *Wiesen.* II *Moos.*	
I *Kohl –* II *Hopfen –* } *Garten.* III *Wein –*	
I *Steinerne* } *Ge-* II *Hölzerne* } *bäude.* III *Kirche.*	
I *Laubholz.* II *Gebüsch.*	
Nadelholz.	
I *Landstrasse.* II *Feldweg.* III *Fußweg.*	
I *Flüsse und Teiche.* II *Brücke.*	
Berge.	

Digitized by Google

Felder.	
I *Wiesen.* II *Moos.*	
I *Kohl –* II *Hopfen –* } *Garten.* III *Wein –*	
I *Steinerne* } *Ge-* II *Holzerne* } *bäude.* III *Kirche.*	
I *Laubholz.* II *Gebüsch.*	
Nadelholz.	
I *Landstrasse.* II *Feldweg.* III *Fußweg.*	
I *Flüsse und Teiche.* II *Brücke.*	
Berge.	

Digitized by Google

Sind die Theile mit der Feder richtig gezeichnet; so kann man sie mit derjenigen Farbe überziehen, die sie in der Natur haben, wie die zweyte Tafel zeigt. Die Farben, die man hierzu gebraucht, sind die drey Hauptfarben, als Gelb, Roth und Blau. Zur gelben Farbe nimmt man Gummigutt, zur rothen Karmin oder feinen Lack, und zur blauen Mineralblau, welche man gegenwärtig überall in kleinen Stängelchen zu kaufen bekommt. Aus diesen drey Farben können alle übrigen, für die Planzeichnung nöthigen, hinlänglich gemischt werden. Denn Gelb und Roth gibt Oranie, Gelb und Blau gibt Grün, und Blau und Roth Violett, welche mit den obigen die Farben des Regenbogens ausmachen. Mischt man alle drey Farben zusammen, so erhält man eine dunkelgraue Farbe.

Durch die Beymischung von mehr oder weniger Wasser können die Farben heller oder dunkler gemacht werden, und daher verschiedene Grade und Abstufungen erhalten. Eben so erhält man auch von den gemischten Farben verschiedene Abarten, wenn man von einer Farbe mehr, als von der andern beymischt. Denn gibt man der grünen Farbe mehr Blau, als Gelb, so wird das Grüne in's Bläuliche oder Meergrüne fallen. Setzt man aber mehr Gelb zu, so erhält man eine gelblich-grüne Farbe. Zum Schatti-

Digitized by Google

ren der Gegenstände bedient man sich des Tuſches, welchen man mit mehr oder weniger Waſſer vermengt, je nachdem man die Schatten ſtark oder ſchwach haben will.

Die Pinſel, welche man zum Auftragen der Farben gebraucht, ſind die ſogenannten Haarpinſel, die, wenn ſie auch etwas groß ſind, ſich doch allemal in eine feine Spitze endigen; daher die gar kleinen zu nichts dienen. Will man machen, daß eine Farbe oder der Schatten ſich nach und nach verliere, wie dieſes bey runden Körpern nöthig iſt; ſo kann man zwey Pinſel in einen Stiel verbinden, in den einen die Farbe oder den Tuſch, und in den anderen reines Waſſer nehmen. Man legt dann die Tuſchfarbe ziemlich naß an, wendet den Pinſel um, berührt mit der äußerſten Spitze des Waſſerpinſels den äußerſten Rand der Farbe, und fährt ſo lange auf und ab, bis die Farbe ſich ſanft verliert. Es iſt aber dabey wohl Acht zu haben, daß man weder zu viel Farbe, noch zu viel Waſſer in den Pinſel nehme, welches die Uebung zeigen muß. Will man große Flächen mit einer einzigen Farbe überſtreichen; ſo muß dieſe wohl mit Waſſer verdünnt, und, von einer Ecke des Umriſſes angefangen, bis an das Ende, ohne ſie trocknen zu laſſen, fortgezogen werden. Denn wird die Farbe trocken, ſo macht ſie Flecken; daher dicke Farben ſich nicht wohl gleich an-

Digitized by Google

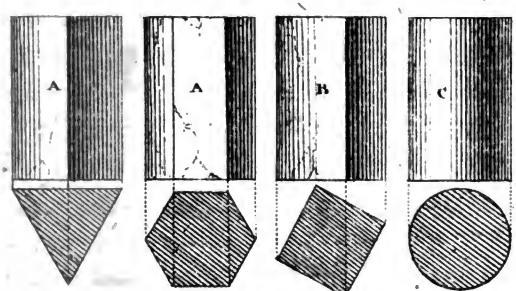
streichen lassen, und zu großen Flächen unbrauchbar sind. Ueberhaupt soll in der Planzeichnung Alles mit leichten Farben angezeigt seyn, weil sonst die Plane ein häßliches Aussehen erhalten. Ist die ganze Zeichnung ausgefertigt; so wird am Ende der verjüngte Maßstab beygesetzt, und auf einem leeren Platze des Papiers die nöthigen Erklärungen beygefügt. Man kann auch die Weltgegenden in die Zeichnung aufnehmen, wenn man die Magnetnadel beym Messen auf eine Linie stellt, und bemerkt, wie viele Grade dieselbe anzeigt, und die nämliche Anzahl von Graden durch den Transporteur auf die nämliche Linie der Zeichnung trägt. Die Magnetnadel wird durch die Figur **A** vorgestellt, wovon die Spitze allemal gegen Norden oder Mitternacht hinzielt.

Digitized by Google

Von den geometrischen Körpern
oder von der
Stereometrie.

278. **Erklärungen.** Körper gibt es zweyerley, regelmäßige und unregelmäßige. Regelmäßig sind diejenigen, die von lauter regelmäßigen Flächen eingeschlossen sind; alle übrigen nennt man unregelmäßig.

279. Zu den regelmäßigen Körpern gehören: die Eckſäule (Prisma), der Balken (Parallelepipedum), die Walze (Cylinder), die Spitzſäule (Pyramide), der Kegel (Konus), und die regelmäßigen Körper-Vielecke (Polyedern), zu welchen auch die Kugel (Sphäre), gerechnet wird.

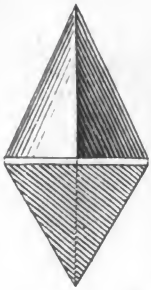


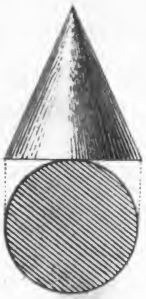
Grundflächen.

280. Diejenige Fläche, worauf ein Körper steht, wird die Grundfläche genannt.

Digitized by Google

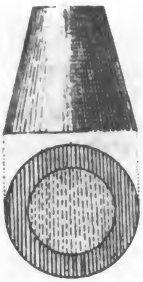
281. Das Prisma **A** ist ein Körper, welcher von zwey gleichen Grundflächen, und eben so vielen Parallelogrammen, als die Grundflächen Seiten haben, eingeschlossen ist. Die Prismen werden nach der Anzahl ihrer Seiten oder Ecken dreyeckige, fünf- oder sechseckige Prismen genannt. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt ein solches Prisma ein Parallelepipedum **B**. Ist die Grundfläche ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, oder was Eines ist, ein Kreis; so wird das Prisma zu einer Walze **C**.



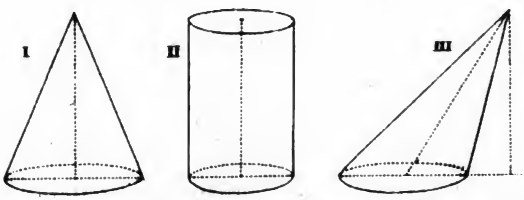


282. Eine Pyramide ist ein Körper, welcher von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die Pyramide ist drey-, vier-, fünfeckig, je nachdem die Grundfläche ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck ist. Hat die Pyramide zur Grundfläche einen Kreis, so wird sie zum Kegel, welcher daher als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann.

Digitized by Google



283. Hieher gehören noch die gestümmelte Pyramide und der gestümmelte Kegel. Die gestümmelte Pyramide ist ein Körper, welcher unten und oben mit ungleichen, aber ähnlichen Flächen, und mit so vielen Trapezen, als diese Flächen Seiten haben, umgeben ist. Wird sowohl die untere, als die obere Fläche zum Kreise, so entsteht ein gestümmelter Kegel.



284. Die Achse der Körper wird diejenige gerade Linie genannt, welche von der Spitze oder von dem Mittelpunkte der obern Fläche auf den Mittelpunkt der untern Fläche, durch den Körper geht. Fig. I.

285. Ein senkrechter Körper ist derjenige, dessen Achse senkrecht auf der Grundlinie steht,

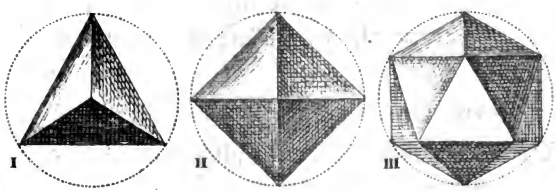
Digitized by Google

Fig. II.; ein schiefer aber, dessen Achse schief auf der Grundfläche steht. Fig. III.

286. Die Höhe der Körper ist die senkrechte Linie, welche von dem obersten Punkte der Achse auf die Grundfläche gefällt wird. Bey senkrechten Körpern gibt die Achse zugleich die Höhe; bey schiefen aber fällt die senkrechte über den unteren Punkt der Achse hinaus, in welchem Falle dieser in gerader Richtung mit der Grundfläche so lange verlängert werden muß, bis er die senkrechte schneidet. Fig. III.

287. Ein Körperwinkel ist derjenige, welcher von drey oder mehr Flächen eingeschlossen wird.

288. Regelmäßige Körper-Vielecke sind diejenigen, welche aus lauter ganz gleichen Flächen und Winkeln bestehen. Es gibt deren nur fünf, als das Tetraedrum, das Oktaedrum, das Ikosaedrum, das Heraedrum und das Dodekaedrum.

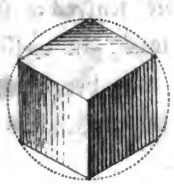


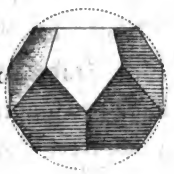
Ein Tetraedrum ist ein Körper, welcher von vier gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. I.

Digitized by Google

Ein Oktaedrum ist ein Körper, welcher von acht gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. II.

Ein Ikosaedrum ist ein Körper, welcher von zwanzig gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. III.





Ein Hexaedrum, oder Würfel (Kubus) ist ein Körper, welcher von sechs gleichen Quadraten umgeben ist. Fig. I.

Ein Dodekaedrum ist ein Körper, welcher von zwölf gleichen regelmäßigen Fünfecken umgeben ist. Fig. II.

289. Bey dem Tetraeder bilden drey gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel. Weil nun der Winkel eines gleichseitigen Dreyeckes 60° hält, so geben die drey Dreyecke zusammen dreymal 60°, das ist 180°.

Beym Oktaeder bilden vier gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel; folglich hält dieser viermal 60°, das ist 240°.

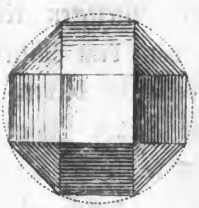
Beym Ikosaeder machen fünf gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel, welcher folglich $5 \times 60 = 300°$ in sich enthält.

Digitized by Google

Beym Würfel machen drey rechtwinklichte Dreyecke einen Körperwinkel, welcher daher dreymal 90°, das ist 270° hält.

Beym Dodekaeder bilden drey regelmäßige Fünfecke einen Körperwinkel. Da nun nach Seite 136, Nro. 137 der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes 108° hält; so geben drey solche Winkel dreymal 108°, das ist 324°.

Mehrere Körperwinkel können aus lauter gleichen regelmäßigen Flächen nicht zusammen gesetzt werden, weil alle entweder 360°, oder darüber haben würden. Denn 360° liegen in einer Ebene, und bilden keinen Körperwinkel. Mehr als 360 können weder einen Winkel bilden, noch in einer Ebene liegen; daher es auch nicht mehr, als die obigen regelmäßigen Körper-Vielecke geben kann.

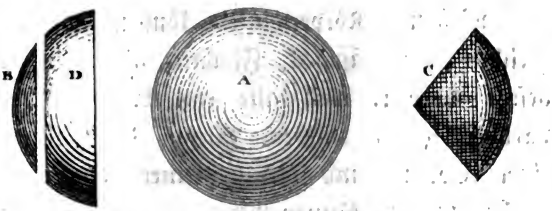


290. Wir wollen hier noch einen andern Körper vormerken, der zwar nicht zu den regelmäßigen Körper-Vielecken gehört; aber doch mit ihnen einige Aehnlichkeit hat, und zu verschiedenen Zierden gebraucht wird. Dieß ist der Körper des Archimedes, der von 18 gleichen

Digitized by Google

Quadraten und 8 gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist.

291. Die obigen regelmäßigen Körper-Vielecke, so wie der Körper des Archimedes, lassen sich in Kreise beschreiben; weil ihre Ecken alle gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt sind, wie die Zeichnungen zeigen.



292. Die Kugel **A** ist ein Polyedrum oder regelmäßiges Körper-Vieleck, welches von unendlich vielen kleinen Vielecken eingeschlossen ist, die alle gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind, und ihre Oberfläche bilden. Die Achse einer Kugel wird die gerade Linie genannt, welche von einem Punkte ihrer Oberfläche auf die entgegengesetzte Seite durch den Mittelpunkt geht. Die Enden der Achse nennt man Pole. Die größte Kreisfläche einer Kugel ist die, welche entsteht, wenn die Kugel durch ihre Achse geschnitten wird.

293. Ein **Kugelabschnitt B** ist ein Körper, welcher mit einem Theile der Oberfläche der Ku-

Digitized by Google

gel, und mit einer Kreisfläche begränzt ist, und der entsteht, wenn ein Theil der Kugel durch eine Fläche abgeschnitten wird. Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt; so entstehen zwey gleiche Halbkugeln.

294. Ein Kugelausschnitt **C** ist ein Körper, welcher einen Theil der Oberfläche der Kugel zur Grundfläche, und seinen Scheitelpunkt in dem Mittelpunkte der Kugel hat.

295. Ein **Kugelband** oder **Zone D** ist ein Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher zwischen zwey gleichlaufenden Kreislinien enthalten ist.

Von der Zeichnung und Ausmessung der Körper.

296. Weil ein Körper außer seiner Länge und Breite auch noch eine Dicke oder Höhe hat; so können diese drey Theile nicht zugleich auf einer Fläche, auf dem Papiere, nach allen drey Maßen vorgestellt werden. Man ist daher gezwungen, die Körper nach ihren verschiedenen Flächen und Durchschnitten so zu zeichnen, daß die Maße derselben nach einem verjüngten Maßstabe aufgetragen, und abgenommen werden können.

Digitized by Google

Diese Zeichnungen sind sowohl für die Baukunst, als für die dahin einschlägigen technischen Künste von großer Wichtigkeit; weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, Werke von großem und weitschichtigen Umfange nach einem verjüngten Plane, oder Risse in's Große auszuführen.

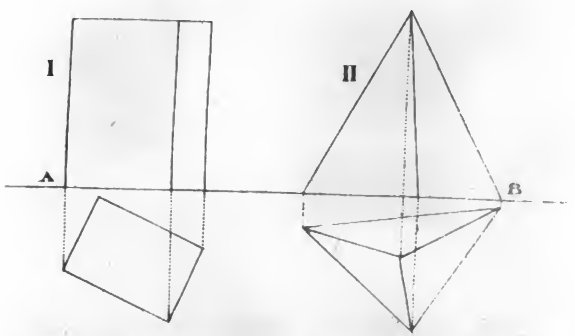
Um einen Körper nach seinen Maßen richtig darzustellen, muß vor allem die Grundfläche desselben gezeichnet werden. Dieser folgt die vordere senkrechte Fläche. Die erste zeigt die Länge und Breite, die zweyte die Höhe eines Körpers an.

In der Baukunst nennt man die Zeichnung der Grundfläche, oder diejenige, welche ein Gebäude so darstellt, wie es aussehen würde, wenn es wagrecht durchschnitten wäre, den Grundriß; und die Kunst; die diese Zeichnung hervor bringt, die Ichnographie. Die Zeichnung der vordern oder senkrechten Fläche wird der Standriß oder Aufriß genannt, und die Kunst, diese Zeichnung zu verfertigen heißt die Orthographie. Werden verschiedene Vorsprünge der Gebäude durchschnitten dargestellt, ohne daß man auf die innere Einrichtung Rücksicht nimmt; so nennt man dieses das Profil. Wird ein Gebäude oder ein Körper so durchschnitten vorgestellt, daß man die innere Einrichtung nach ihren verschiedenen

Digitized by Google

Maßen anzeigen kann; so heißt die Zeichnung der Durchschnitt.

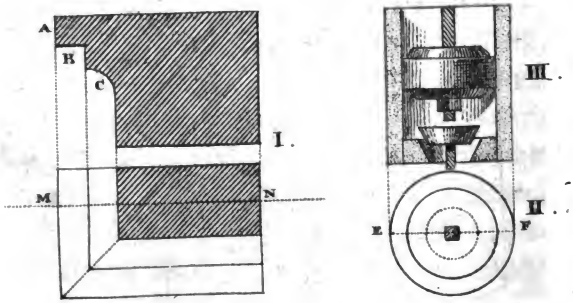
Diese verschiedenen Arten von Zeichnungen der Körper, nämlich der Grundriß, der Standriß, das Profil, und der Durchschnitt, sind durchaus geometrisch, das ist, nach ihren verschiedenen Maßen eingerichtet, und die Körper können dadurch nach ihrer Länge und Breite sowohl, als nach ihrer Dicke und innern Einrichtung vorgestellt, und die Maße derselben auf einem verjüngten Maßstabe abgenommen werden. Die Art, diese verschiedenen Zeichnungen zu verfertigen, ist bey bloß geometrischen Körpern, aus welchen die baukünstlichen hervor gehen, kürzlich folgende:



Man verfertigt vor allem den Grundriß: zieht eine wagrechte Linie **AB**, trägt alle Punkte von den Ecken oder Winkeln des Grundrisses senkrecht auf diese Linie, und erhebt sie nach

Digitized by Google

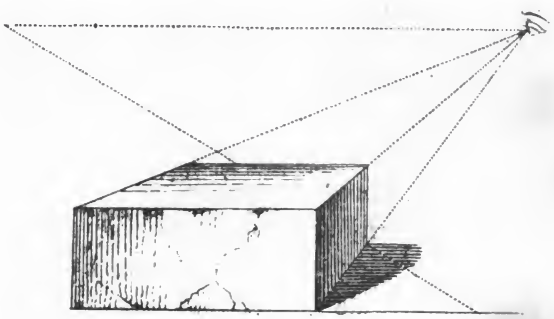
Art des Körpers, und nach seiner Höhe zu Flächen. Die Grundflächen mit den übrigen wagrechten Flächen bleiben bloße wagrechte Linien, weil die Theile sonst ihr gehöriges Höhenmaß verlieren würden, wie man bey Fig I. sieht. Ist der Körper spitzig, so wird diese Spitze im Grundrisse durch einen Punkt angezeigt, senkrecht auf die Grundlinie getragen, und von dort aus senkrecht aufgerichtet, wie die Fig. II. zeigt. Bey der Kugel kann die größte Kreisfläche als ihre Grundfläche betrachtet werden. Die Grundrisse zeigen überall die Länge und Breite; die Standrisse aber die Höhe der Körper an. Bey den obigen Erklärungen sind die Körper alle auf diese Art vorgestellt.



Bey den Profilen kommt blos der äußere Umriß **ABC** nach seinen geometrischen Maßen und Vorsprüngen in Betracht, daher das Profil nur als eine Fläche dargestellt wird; kann aber auch aus dem Grundrisse, wenn selber durch

eine Linie **MN** durchschnitten wird, senkrecht in den Standriß gebracht werden, wie dieses die Fig. **I.** zeigt.

Der Durchschnitt entsteht, wenn man die Grundfläche mit einer Linie durchschneidet, die Punkte des Durchschnittes auf die gleichartigen, oder gleichnamigen Theile senkrecht in den Standriß trägt, und dieselben durchschneidet. Die Figur **II.** stellt den Grundriß, **EF** die Durchschnittslinie, und die Figur **III.** die durchschnittene Röhre mit ihrem Kolben und dem Ventille vor.



297. Werden die Körper so vorgestellt, wie sie uns in der Natur, aus einem gewissen Gesichtspunkte betrachtet, erscheinen; so nennt man diese Zeichnung die perspectivische, oder scenographische. Sie entsteht vermittelst der Durchschneidungen zweyer Linien, die auf zwey Hauptpunkte gerichtet sind, wovon einer der Gesichts- oder Augenpunkt, und der andere der Distanz-

Digitized by Google

oder Entfernungspunkt genannt wird. Der erste ist der Punkt, aus welchem unser Auge den Körper betrachtet; der zweyte zeigt die Entfernung an, in welcher der Körper betrachtet wird; beyde stehen allemal auf einer horizontalen Linie, welche in der nämlichen Höhe, wie das betrachtende Auge über der Grundfläche der Körper erhoben liegt.

Die perspectivische Zeichnung der Körper ist ein Haupttheil der freyen Handzeichnung, und der Mahlerey, weil dort die Körper nur nach ihren Erscheinungen, und nicht nach ihren Maßen abgebildet werden. Die Maße der Linien und Flächen verändern sich in dieser Art Zeichnung beständig nach den Punkten, aus welchen die Körper betrachtet werden; daher die perspectivische Zeichnung zum Abnehmen der Größen durch den verjüngten Maßstab nicht anwendbar ist. Hier kann sie nur in so weit in Anspruch kommen, als sie sich auf die geometrische Zeichnung stützet, und aus derselben hervor geht. Durch die optischen Regeln erhält sie ihre weitere Ausarbeitung.

298. Weil die Körper bloß nach ihren Flächen dargestellt werden; so kann das Ausmessen derselben für den, der die Flächenausmessung versteht, keine weitere Schwierigkeit haben.

Digitized by Google

Bey runden Körpern bedient man sich, um den Durchmesser zu finden, des Greifzirkels Fig. I., und um die Längen der Umkreise zu erhalten, des Reifmaßes Fig. II., welches man auch Rollmaß nennet, und das aus mehreren starken, aber schmalen Streifen von Papier oder Pergament zusammen gesetzt ist, worauf sich der landesübliche Schuh, in seine Zolle und Linien eingetheilt, befindet. Zum leichtern Berechnen kann man auf einer Seite auch das Decimal-Maß auftragen. Dieses Rollmaßes, wenn es von einer beträchtlichen Länge ist, bedient man sich auch zum Ausmessen der Linien in Gebäuden, und zur Aufhebung geometrischer Bauplane.

299. Will man den körperlichen Inhalt eines Körpers wissen; so muß ein anderer Körper als Grundmaß angenommen werden. So wie zum Ausmessen der Flächen das Quadrat das schicklichste Maß ist, so ist für die Körper der Würfel oder Kubus das brauchbarste. Der Kubikschuh, welcher einen landesüblichen Schuh in der Länge, Breite und Dicke hält, ist also das Grundmaß für die Körper.

Digitized by Google

300. In dem neuen französischen Maße wird bey festen Körpern, und vorzüglich beym Holzmaße der Kubikmetre angenommen, welcher Stere genannt wird. Ein Kubikmetre oder Stere ist ein Körper, der einen Metre Länge, Breite und Dicke hält. 3 Steres Holz machen ungefähr eine bayerische Klafter zu 6 Schuh Länge und Breite, und $3\frac{1}{2}$ Schuh Scheiterlänge. Größere Abtheilungen des Kubikmaßes kommen nicht mehr vor.

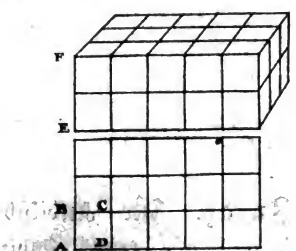
301. Bey flüssigen Körpern, als Wein, Bier, Getreide ꝛc., ist der Litre das Grundmaß, welches ein Körper von einem Decimetre, oder einem Zehntheile eines Metres Länge, Breite und Dicke ist, und nach dem Getränkmaße nicht gar eine bayerische Maß, sondern nur $\frac{15}{16}$ derselben enthält; daher 16 Litres 15 bayerische Maß ungefähr ausmachen. 60 bayerische Maß oder ein Eimer hält also ungefähr 64 Litres. Im Getreidmaße geben 16 Litres ungefähr 13 Dreyßiger, folglich ein bayerisches Schäffel schwer Getreid $221\frac{7}{13}$ Litres ungefähr.

Die kleineren Abtheilungen eines Litres sind wieder die Zehntheile, Hunderttheile und Tausendtheile desselben. Der zehnte Theil eines Litres heißt Decilitre, der hundertste Centilitre, der tausendste Millilitre. Die größern Abtheilungen sind folgende: 10 Litres werden ein Decalitre, 100 Litres ein Hectolitre, 1000 Litres

ein Kilolitre, und 10000 Litres ein Myrialitre genannt.

302. Auch das neue französische Gewicht ist aus den Theilen des Metres entnommen. Denn die Schwere von einem Kubik-Centimetre rein destillirten Wassers ist als Einheit desselben angesehen, und heißt Gramme. Die Benennungen der kleinern Theile sind wieder: Decigramme, der zehnte Theil; Centigramme, der hundertste Theil; Milligramme, der tausendste Theil eines Grammes. Die größern Abtheilungen sind: Decagramme, 10 Grammen; Hectogramme, 100 Grammen; Kilogramme, 1000 Grammen; und Myriagramme, 10000 Grammen. 10 bayerische Pfund geben ganz genau 5609 Grammen.

Lehrsätze der Stereometrie.

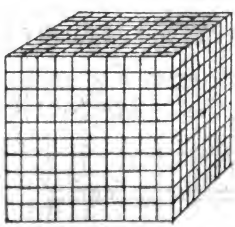


303. Lehrsatz. Der körperliche Inhalt eines gerade stehenden Parallelepipedums wird erhalten, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Digitized by Google

Beweis. Gesetzt, es halte in der obigen Figur ein kleines Quadrat auf der Grundfläche **ABCD** einen Quadratschuh, so zeigt die Grundfläche an, wie viele Kubikschuhe auf derselben liegen können, und **EF** zeigt an, wie viele Schichten solcher Kubikschuhe auf einander gelegt werden können; es gibt also offenbar die Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe, den kubischen Inhalt eines gerade stehenden Parallelepipedums.

304. Zusatz. Weil der Würfel oder Kubus eine Figur ist, wo die Länge, Breite und Höhe einander gleich sind; so entsteht allemal ein Würfel, so oft eine Zahl oder Linie mit sich selbst, und das Product noch einmal mit der nämlichen Zahl oder Linie multiplicirt wird.



305. Zusatz. Der Kubikschuh hält also im zehntheiligen Maße 1000 Kubikzoll; weil die Grundfläche 100 Quadratzoll hält, und diese noch einmal mit 10 Zoll, als der Höhe des Kubikschuhes, multiplicirt werden müssen, woraus 1000 Kubikzoll entstehen. Der Kubikzoll hält

Digitized by Google

wieder 1000 Kubiklinien. Will man also Kubikschuhe zu Kubikzollen machen; so müssen 3 Nullen hinzu gesetzt, macht man aber Kubikzolle zu Schuhen, so müssen die letzten drey Ziffer hinweggeschnitten werden; weil erst 1000 Kubikzoll einen Kubikschuh ausmachen, und alle übrigen Zahlen, die weniger betragen, nothwendig Kubikzolle seyn müssen. Im zwölftheiligen Maße hält der Quadratschuh 144 Quadratzoll, diese, mit 12 Zoll multiplicirt, geben 1728 Kubikzoll.

306. Das Zeichen einer Kubikzahl ist ein kleines c oberhalb der Zahlen vor dem Zeichen der Schuhe und Zolle:

$36^{c\prime}$ $50^{c\prime\prime}$.

36 Kubikschuh, 50 Kubikzoll.

307. Weil man weiß, daß 1000 zehntheilige Kubikzoll 1728 zwölftheilige geben; so kann man auf eine leichte Art das zehntheilige Kubikmaß in zwölftheiliges verwandeln. Es sollen z. B. 346 zehntheilige Kubikzoll in zwölftheilige verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

$x^{c\prime\prime}$ zwölfth.	$346^{c\prime\prime}$ zehnth.
1000 zehnth.	1728 zwölfth.

Antwort $597\frac{888}{1000}{}^{c\prime\prime}$.

308. **Anmerkung.** Weil der Unterschied des zehntheiligen Maßes zu dem zwölftheiligen bloß in Zollen besteht, und die nach einer vollen-

Digitized by Google

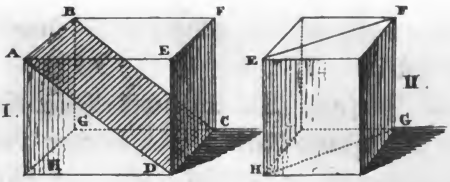
deten Rechnung übrig gebliebenen Kubikzolle in den meisten Fällen in keinen Betracht kommen, oder leicht zu Viertel- und Achtelschuhen angeschlagen werden können, wodurch größtentheils eine hinlängliche Genauigkeit erlangt wird: so kann man die Decimalrechnung auch bey der Kubikrechnung in bürgerlichen Geschäften anwenden.

309. Nach dem neuen französischen Maße hält der Quadratmetre 100 Quadrat-Decimetres, und daher der Kubikmetre 1000 Kubik-Decimetres. Es hat also der Kubik-Decimetre wieder 1000 Kubik-Centimetres, und der Kubik-Centimetre 1000 Kubik-Millimetres; daher müssen auch hier, wenn man kleinere Theile zu größern machen will, rückwärts angefangen, drey Ziffer abgeschnitten werden, wie dieses bey dem zehntheiligen Fußmaße der Fall ist. Die Kubikzahl 34^{c}, 692^{cc}, 530^{ccc} bedeutet also 34 Kubikmetres, 692 Kubik-Decimetres und 530 Kubik-Centimetres; oder nach der Nro. 218 angezeigten deutschen Uebersetzung 34 Kubikmetres, 692 Zehntheile, und 530 Hunderttheile.

310. Lehrsatz. Die Diagonalfläche **ABCD** theilt ein Parallelepipedum in zwey gleiche Theile. Fig. I.

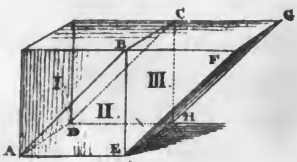
Beweis. Da die einschließenden Flächen und Winkel der beyden Theile vollkommen gleich

Digitized by Google



sind; so sind die beyden Körper **ABCDEF**, und **ABCDGH** in nichts von einander unterschieden, folglich ebenfalls einander gleich.

311. Zusatz. Wie das Parallelepipedum Fig. **II.** durch die Diagonalfläche **EFGH** getheilt; so entstehen aus der obigen Ursache zwey gleiche Prismen, wo im vorhergehenden Falle zwey gleiche Keile entstehen, welche, wenn man sie gehörig wendet, ebenfalls Prismen vorstellen.



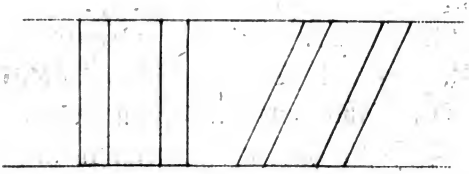
312. Lehrsatz. **Parallelepipeden von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich.**

Beweis. Zerschneidet man das Parallelepipedum **I. II.** durch **ABCD** in zwey gleiche Theile, und legt den Theil **I.** nach **III.**; so hat man ein schief stehendes Parallelepipedum **ABCDEFGH** von gleicher Grundfläche und Höhe, welches dem gerade stehenden vollkommen

Digitized by Google

gleich seyn muß, weil es ganz aus den nämlichen Theilen besteht.

313. Zusatz. Da ein jedes Parallelepipedum in zwey gleiche Keile oder dreyeckige Prismen getheilt werden kann; so sind Keile und Prismen von einerley Grundfläche und Höhe ebenfalls einander gleich.

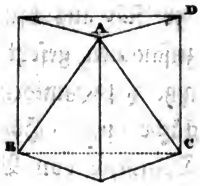


314. Zusatz. Auch vieleckige Prismen von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich; weil sie sich durch Schnitte aus ihrem Mittelpunkte gegen die Ecken in lauter gleiche dreyeckige Prismen zerlegen lassen.

315. Zusatz. Weil sich die Kreisfläche als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten läßt, so können auch Cylinder, als aus unendlich vielen dreyeckigen Prismen zusammen gesetzt, betrachtet werden; folglich sind auch Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen einander gleich.

316. Lehrsatz. Eine dreyeckige Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckigen Prisma, das mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat.

Digitized by Google



Beweis. Wenn man ein dreyeckiges Prisma von einer Ecke **A** gegen die entgegengesetzte Seite **BC** schneidet, so erhält man eine dreyeckige Pyramide **ABC**. Schneidet man den übrig gebliebenen Körper noch einmal nach der Diagonallinie seiner größten Fläche **BD**; so erhält man wieder zwey Pyramiden. Man hat also drey dreyeckige Pyramiden, wovon zwey vollkommen gleich und ähnlich sind, die dritte aber mit den zweyen einerley Grundfläche und Höhe hat, und folglich den beyden ebenfalls gleich ist. Es ist also die dreyeckige Pyramide der dritte Theil eines dreyeckigen Prisma, welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat. Der Beweis kann am deutlichsten durch wirkliche Zerschneidung eines solchen Prisma gemacht werden.

317. Weil sich vieleckige Prismen in dreyeckige zerlegen lassen; so ist auch eine vieleckige Pyramide wieder der dritte Theil eines vieleckigen Prisma von einerley Grundfläche und Höhe.

318. Auch der Kegel ist der dritte Theil einer Walze, die mit ihm einerley Grundfläche und

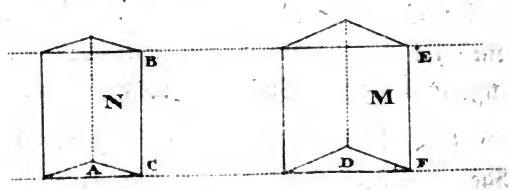
Digitized by Google

Höhe hat; weil er sich aus lauter unendlich kleinen Pyramiden zusammen gesetzt betrachten läßt.

319. Zusatz. Pyramiden und Kegel von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich; weil sie Drittheile von Prismen sind, und die Drittheile sich wie die Ganzen verhalten.

320. Zusatz. Weil die Grundflächen einander gleich seyn können, ohne die nämliche Anzahl von Seiten zu haben; so können auch dreyeckige Prismen und Pyramiden vieleckigen gleich seyn, wenn sie nur Grundflächen von einerley Inhalt und gleiche Höhen haben.

321. Zusatz. Was bisher von Pyramiden und Kegeln in Hinsicht ihrer Gleichheit gesagt wurde, gilt auch von gestümmelten Pyramiden und Kegeln, das ist: gestümmelte Pyramiden und Kegel sind einander gleich, wenn bey einer gleichen Höhe auch ihre untern und obern Flächen einander gleich sind.



322. Lehrsatz. Prismen verhalten sich wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind.

Digitized by Google

Beweis. Weil der Inhalt eines Prisma aus der Multiplication der Grundfläche mit der Höhe besteht; so ist das Prisma $N = A \times BC$, und $M = D \times EF$. Da sich nun aus zwey Gleichungen eine geometrische Proportion zusammen setzen läßt; so verhält sich

$$N : M = A \times BC : D \times EF.$$

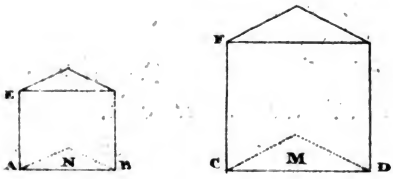
Weil aber die Höhen gleich sind, so kann die Multiplication mit denselben ohne Schaden der Proportion hinweg bleiben, und es verhält sich $N : M = A : D$.

Sind die Grundflächen gleich; so kann der Beweis wieder auf die nämliche Art gemacht, und die Multiplication mit den Grundflächen hinweg gelassen werden.

323. **Zusatz.** Da sich der nämliche Beweis sowohl von Parallelepipeden und den übrigen Prismen, als von Pyramiden machen läßt; so verhalten sich auch diese bey gleicher Höhe wie die Grundflächen, und bey gleichen Grundflächen wie die Höhen. Das Nämliche gilt auch von Kegeln, weil man sie als Pyramiden betrachten kann.

324. **Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kubuse oder Kubikzahlen ihrer ähnlich liegenden oder gleichnamigen Linien.

Digitized by Google



Beweis. Da sich nach Seite 147, Nro. 253. die Grundflächen verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien; so verhält sich die Grundfläche $N : M = AB^2 : CD^2$. Es verhält sich aber auch $EA : FC = AB : CD$, als gleichnamige Seiten.

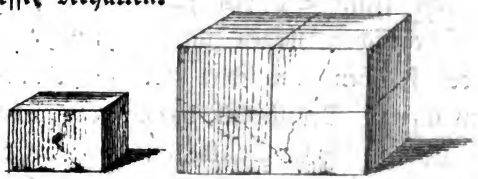
Multiplicirt man die Glieder der beyden Proportionen der Ordnung nach mit einander, welches nach Seite 139, Nro. 244. ohne Verletzung der Proportion geschehen kann; so ist $N \times EA : M \times FC = AB^2 \times AB : CD^2 \times CD$. Da nun $N \times EA$, und $M \times FC$ die Kubikinhalte der beyden Körper geben; $AB^2 \times AB$, und $CD^2 \times CD$ aber den Kubus von AB und CD ausmachen: so verhalten sich die Kubikinhalte der beyden Prismen, wie die Kubuse ihrer ähnlich liegenden Linien AB und CD, das ist:

$$N \times EA : M \times FC = AB^3 : CD^3.$$

Weil der nämliche Beweis auch von Pyramiden gemacht werden kann, und die übrigen Körper sich in Prismen, oder Pyramiden zerlegen lassen; so verhalten sich die kubischen Inhalte aller ähnlichen Körper, wie die Kubuse ihrer ähnlich liegenden Linien.

Digitized by Google

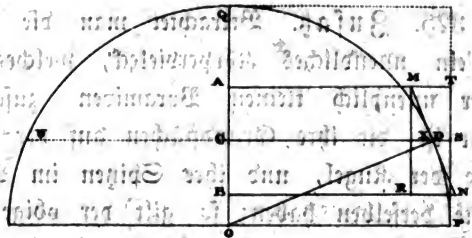
325. Zusatz. Betrachtet man die Kugel als ein unendliches Körpervieleck, welches aus lauter unendlich kleinen Pyramiden zusammen gesetzt ist, die ihre Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel, und ihre Spitzen im Mittelpunkte derselben haben; so gilt der obige Satz auch von Kugeln, welche sich also wie die Kubuse oder Kubikzahlen ihrer Durchmesser oder Halbmesser verhalten.



326. Zusatz. Vergleicht man zwey ähnliche Parallelepipeden, wovon die Seiten des einen noch so groß sind, als die des andern; so können aus dem größern acht kleine geschnitten werden, welches die obige Wahrheit sinnlich darstellet. Nimmt man den Durchmesser einer Kugel noch so groß, als den einer andern, so ist ihr Kubikinhalt 8 mal größer; ist der Durchmesser dreymal so groß, so ist der Kubikinhalt 27 mal größer; weil 8 die Kubikzahl von 2, und 27 die Kubikzahl von 3 ist.

327. Lehrsatz. Die Oberfläche der Kugel wird erhalten, wenn man den Durchmesser der größten Kreisfläche der Kugel mit dem Umkreise multiplicirt.

Digitized by Google



Beweis. Man denke sich die ganze Kugel in lauter sehr kleine Scheiben zerschnitten, deren gebogene Oberflächen wegen ihrer kleinen Höhe als gerade Flächen betrachtet werden können. Nimmt man nun Deutlichkeit halber den Theil **AMNB** als eine solche Scheibe an, so wird die Linie **CD** mit **MN**, wenn sie sich um die Achse **QQ** herum drehen würde, eine Fläche beschreiben, wovon **CD** der mittlere Halbmesser, und die damit beschriebene Linie der mittlere Umkreis derselben wäre. Die mit **MN** beschriebene Fläche würde also gleich seyn dem Producte, welches entstände, wenn man die, durch **CD** beschriebene Kreislinie, als die mittlere Länge zwischen **AM** und **BN**, mit **MN** multiplicirte. Dreht sich nun ferner **CS** mit **TN** um die Achse **QQ**, so beschreiben diese ebenfalls eine Fläche, wovon **CS** wieder der Halbmesser, und **NT** die Höhe derselben, der Flächeninhalt aber gleich dem Producte aus **NT** oder **AB** in die mit **CS** beschriebene Kreislinie wäre. Diese beyden Flächen sind nun vollkommen einander gleich. Denn zieht man den Halbmesser

DO, und die senkrechte MR, so erhält man zwey rechtwinklichte Dreyecke MNR und DOC, welche einander ähnlich sind; weil beyde bey C und R rechte Winkel haben, und der Winkel bey O den Bogen QD, der Winkel bey N = X aber als ein Winkel an der Peripherie den halben Bogen UQD, das ist, ebenfalls QD zum Maße hat; daher auch der dritte Winkel des einen Dreyeckes gleich dem dritten des andern ist. Es verhält sich also: MN : MR = DO : DC. Setzt man anstatt MR die gleiche AB, und anstatt DO die gleiche CS, so ist:

MN : AB = CS : DC und also

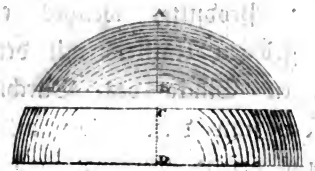
MN × DC = AB × CS.

Es ist aber CS gleich dem Halbmesser der größten Kreisfläche OP, und AB gleich TN, einem Stücke des Durchmessers; folglich die Fläche, welche mit CD und MN beschrieben wird, gleich dem Produkte, welches entsteht, wenn man den größten Umkreis mit dem damit übereinstimmenden Stücke des Durchmessers multiplicirt. Da nun dieses von allen Theilen der Kugel kann gesagt werden; so ergibt sich, daß die Oberfläche der Kugel gleich ist dem Producte, welches entsteht, wenn man den Durchmesser mit dem Umkreise multiplicirt.

328. Zusatz. Es ist oben gezeigt worden, daß man den Inhalt einer Kreisfläche erhalte, wenn man die Hälfte des Halbmessers, oder was

Eines ist, den vierten Theil des Durchmessers mit dem Umkreise multiplicirt. Da nun bey der Oberfläche der Kugel der ganze Durchmesser mit dem Umkreise multiplicirt werden muß; so folgt, daß die Oberfläche der Kugel viermal so groß ist, als ihre größte Kreisfläche, oder diejenige, welche entstände, wenn die Kugel durch ihren Mittelpunkt geschnitten würde.

329. Zusatz. Weil nach Seite 129, Nro. 228. die Kreisfläche entsteht, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multiplicirt, und das Product durch 4 und 100 oder durch 400 dividirt; so erhält man die Oberfläche der Kugel, wenn das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multiplicirt, und nur durch 100 dividirt wird, weil die Oberfläche viermal größer ist, als ihre größte Kreisfläche.



330. Zusatz. Die gebogene Oberfläche eines Kugelabschnittes ist das Product aus der Höhe **AB**, multiplicirt mit dem Umkreise der größten Kreisfläche der Kugel. Eben so ist auch die Höhe **CD**, multiplicirt mit dem nämlichen Umkreise, die Oberfläche eines Kugelbandes oder einer Zone.

Digitized by Google

331. Lehrsatz. Der kubische Inhalt einer Kugel ist gleich dem Producte, welches entsteht, wenn ihre Oberfläche mit dem Halbmesser multiplicirt, und durch 3 dividirt wird.

Beweis. Die Kugel kann als ein regelmäßiges Körpervieleck betrachtet werden, welches aus unendlich vielen kleinen Pyramiden besteht, die ihre Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel, und ihre Spitzen oder Höhen im Mittelpuncte derselben haben. Man kann sie daher als eine Pyramide berechnen, die zu ihrer Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und zu ihrer Höhe den Halbmesser derselben hat; folglich besteht sie aus der Multiplication der Oberfläche mit dem Halbmesser dividirt durch 3.

332. Zusatz. Nimmt man bey der Berechnung anstatt des Halbmessers das Doppelte, nämlich den Durchmesser, so muß am Ende auch das Product mit dem Doppelten von 3, nämlich mit 6, dividirt werden. Weil nun die Oberfläche der Kugel aus dem Quadrate des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 100, besteht, und dieses Quadrat noch einmal mit dem Durchmesser multiplicirt werden muß, wodurch der Kubus des Durchmessers hervor kommt; so erhält man den körperlichen Inhalt einer Kugel am bequemsten, wenn man den Kubus des Durchmessers mit der Zahl

Digitized by Google

314 multiplicirt, und das Product durch 6 und 100, oder durch 600 dividirt.

333. Lehrsatz. Der Kegel, die Kugel und die Walze, wenn sie einerley Grundfläche und Höhe, das ist, den Durchmesser der Grundfläche zur Höhe haben, verhalten sich zu einander, wie 1 : 2 : 3.

Beweis. Der Kubikinhalt eines Kegels besteht aus dem Quadrate des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 4 und 3, oder durch 3 mal 4 = 12. Weil aber die Höhe gleich dem Durchmesser ist; so entsteht aus dem Quadrate des Durchmessers der Kubus desselben. Es ist also der Kubikinhalt eines solchen Kegels gleich dem Kubus des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 12. Da nun bey der Kugel das nämliche Product durch 6 dividirt wird; so folgt, das der Kubikinhalt der Kugel noch so groß sey, als der des Kegels, und beyde sich wie 1 : 2 verhalten. Weil ferner das nämliche Product bey der Walze durch 4 dividirt werden muß, und 4 in 12 dreymal enthalten ist; so verhält sich die Walze zum Kegel, wie 3 : 1; folglich zur Kugel wie 3 : 2.

Wenn also der Kegel Einen Theil hält; so hält die Kugel zwey, und die Walze drey solche Theile.

Digitized by Google

Von der Ausrechnung der Körper.

334. Aufgabe. Prismen, Parallelepipeden und Walzen auszurechnen.

Man suche den Flächeninhalt der Grundfläche, und multiplicire ihn mit der Höhe dieser Körper.

Das nämliche Verfahren gilt auch, wenn diese Körper schief stehen; weil sie nach Nro. 312 den senkrechten von einerley Grundfläche und Höhe gleich sind.

Bey schiefen Walzen wird die Grundfläche eine Ellipse. Man kann aber dafür den Durchmesser aus der Mitte der Walze abnehmen, und mit der ganzen Länge der Achse multipliciren; wodurch man ebenfalls den körperlichen Inhalt bekommt.

Beyspiel. Der Durchmesser einer Walze halte 5′, die Höhe 20′; wie groß wird der Kubikinhalt seyn?

Man suche zuvor die Grundfläche, welche aus dem Quadrate des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 4 und 100, oder was eines ist, durch 400, besteht. Es ist also der Durchmesser $5 \times 5 = 25$, und $25 \times 314 = 7850$. Multiplicirt man sogleich mit der Höhe $= 20$′; so erhält man 157000, und

dividirt durch 400; so ist $392\frac{1}{2}$ der körperliche Inhalt der Walze.

335. Aufgabe. Keilartige Körper auszurechnen.

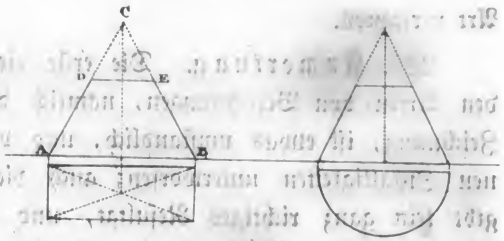
Weil der Keil die Hälfte eines Parallelepipedums ist; so multiplicire man die Grundfläche mit der Höhe, und halbire das Product. Das nämliche Verfahren findet bey schiefen, wie bey geraden Keilen Statt.

336. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt von Pyramiden und Kegeln zu finden.

Weil die Pyramiden Drittetheile von Prismen sind; so multiplicire man die Grundfläche mit der Höhe, und dividire das Product durch 3. Das Nämliche geschieht auch bey Kegeln, weil sie als unendlich-eckige Pyramiden können betrachtet werden. Läßt sich die Höhe bequem in drey Theile zertheilen; so kann man die Grundfläche auch mit dem dritten Theile der Höhe multipliciren. Schiefe Pyramiden und Kegel, weil diese den geraden von einerley Grundfläche und Höhe gleich sind, werden eben so berechnet.

337. Aufgabe. Gestümmelte Pyramiden und Kegel, wo die untern und obern Flächen parallel laufen, auszurechnen.

Man zeichne sich den Durchschnitt derselben nach dem verjüngten Maße auf, und verlängere

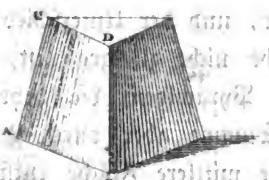


die beyden Seiten, bis sie sich in der Spitze schneiden; rechne die ganze Pyramide **ABC**, dann die kleine **CDE**, jede besonders aus, und ziehe die letztere von der erstern ab: so gibt der Rest den Inhalt der gestümmelten Pyramide **ADEB**. Eben so wird auch mit dem Kegel verfahren.

In Fällen, wo keine große Genauigkeit erfordert wird, und der Unterschied der untern und obern Fläche nicht zu groß ist, können bey gestümmelten Pyramiden die beyden Flächen addirt, die Summe aber durch 2 dividirt werden, wodurch die mittlere Fläche entsteht, welche, mit der Höhe multiplicirt, den Kubikinhalt der gestümmelten Pyramide gibt; weil durch dieses Verfahren die Pyramide gleichsam in ein Prisma verwandelt wird. Beym gestümmelten Kegel kann ebenfalls der untere und obere Durchmesser addirt, die Summe durch 2 dividirt, und mit der Höhe multiplicirt werden. Sind anstatt der beyden Durchmesser die Umkreise gegeben; so wird aus beyden der mittlere Umkreis, und aus

dieſem der Durchmeſſer geſucht, und auf obige Art verfahren.

338. Anmerkung. Die erſte dieſer beyden Arten von Berechnungen, nämlich die durch Zeichnung, iſt etwas umſtändlich, und verſchiedenen Zufälligkeiten unterworfen; auch die zweyte gibt kein ganz richtiges Reſultat, und gewöhnlich zu wenig. Wollte man mit aller Schärfe verfahren, ſo müßten bey dem geſtümmelten Kegel die beyden Durchmeſſer mit einander multiplicirt, das Product zu den beyden Quadraten derſelben addirt, die Summe aber mit der Höhe, und der Zahl 314 multiplicirt, und durch 1200 dividirt werden.



Bey der geſtümmelten Pyramide muß, was immer für eine Seite, z. B. AB, mit ſeiner ähnlich liegenden kleinern CD multiplicirt, die beyden Quadrate dieſer Seiten dazu addirt, die Summe aber mit der Grundfläche und der Höhe multiplicirt, und durch das dreyfache Quadrat der größern Seite AB dividirt werden. Der Beweis dieſer beyden Verfahrungsarten läßt ſich nicht leicht anders, als

durch Hülfe der Algebra darstellen, die wir bey unsern Lesern nicht voraus setzen.

Sind die gestümmelten Pyramiden und Kegel schief; so ist aus den oft angeführten Ursachen das Verfahren das nämliche.

339. Aufgabe. Den Inhalt der regelmäßigen Körpervielecke zu finden.

Außer dem Würfel lassen sich diese Körper alle als Pyramiden berechnen. Denn das Tetraedrum ist eine eigentliche Pyramide von lauter gleichen Flächen, und kann folglich als eine solche berechnet werden.

Das Oktaedrum besteht aus zwey gleichen quadratischen Pyramiden; man sucht also den Inhalt von einer, und verdoppelt das Product.

Ein Ikosaedrum kann in zwanzig gleiche Pyramiden getheilt werden, welche alle die nämliche Grundfläche und die Höhe in dem Mittelpunkte dieses Körpers haben; man suche also den Inhalt von einer, und multiplicire ihn mit 20.

Der Würfel ist ein Parallelepipedum, und kann als ein solches berechnet werden.

Das Dodekaedrum besteht aus zwölf gleichen fünfeckigen Pyramiden; man findet also seinen Inhalt, wenn man Eine ausrechnet, und das Product mit 12 multiplicirt.

Eben so kann auch der Körper des Archimedes in 18 gleiche viereckige, und 8 gleiche

Digitized by Google

dreyeckige Pyramiden getheilt, und ausgerechnet werden.

Das wirkliche Zerschneiden sowohl dieser, als der vorhergehenden Körper, die bey den Lehrsätzen vorkommen, macht die Beweise anschaulich.

340. Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.

Er besteht nach Seite 199, Nro. 332. aus dem Kubus des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 6 und 100.

Beyspiel. Der Durchmesser einer Kugel halte 2′ 4″ Decimalmaß, wie viel wird der Kubikinhalt betragen?

	24″	
	24	
	96	
	48	
	576	Quadrat
	24	
	2304	
	1152	
	13824	Kubus des Durchm.
	314	
	55296	
	13824	
	41472	
4340736	6	$7^{cl}234\frac{56}{100}$ Kubikinhalt.

Weil nach Seite 199, Nro. 331. die Oberfläche, mit dem Halbmesser multiplicirt und durch 3 dividirt, ebenfalls den Kubikinhalt der Kugel gibt; so erhält man ihn auch, wenn man die Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers, oder mit dem sechsten des Durchmessers multiplicirt; eben so, wenn der sechste Theil der Oberfläche mit dem Durchmesser, oder der dritte Theil der Oberfläche mit dem Halbmesser multiplicirt wird.

Den Inhalt einer Halbkugel findet man, wenn man die halbe Oberfläche mit dem dritten Theile des Durchmessers multiplicirt, oder die ganze Kugel nach dem obigen Beyspiele berechnet, und das Product halbirt.

341. Aufgabe. Den Inhalt eines Kugelausschnittes zu finden.

Man suche nach Seite 198, Nro. 330 die gebogene Oberfläche desselben, multiplicire sie mit dem Halbmesser, und dividire das Product durch 3; weil dieser Ausschnitt ein Kegel ist, der zur Grundfläche einen Theil der Oberfläche der Kugel, und den Halbmesser derselben zur Höhe hat.

342. Aufgabe. Den Inhalt eines Kugelabschnittes zu finden.

Man berechne nach der obigen Art den Kugelausschnitt, und ziehe den damit verbundenen

Digitized by Google

Kegel davon ab, so bleibt der Inhalt des Abschnittes übrig.

343. Aufgabe. Den Kubikinhalt von ganz unregelmäßigen Körpern zu finden.

Man wählt dazu ein Gefäß von einem quadratischen Boden, und gerade stehenden Seitenwänden, welche inwendig in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt sind. Man nimmt dann den Körper, legt ihn in das Gefäß, und füllt dasselbe ganz mit Wasser, oder wenn es ein Körper ist, der das Wasser an sich zieht, mit Sand; zieht denselben wieder heraus, und sieht an den Seiten, um wie viel das Wasser oder der Sand gefallen ist; so kann der leere Raum ausgerechnet, und dadurch der Inhalt des Körpers gefunden werden, welcher dem leeren Raume gleich seyn wird.

344. Aufgabe. Einen hohlen Körper auszurechnen.

Man berechne zuvor den ganzen Körper sammt der Höhlung, dann die Höhlung besonders, ziehe den Inhalt der Höhlung von dem des ganzen Körpers ab; so gibt der Rest den verlangten Kubikinhalt.

Beyspiel. Der ganze Durchmesser einer hohlen Röhre sey 6″, der von der Höhlung 4″, die Höhe derselben 20″; wie groß wird der Kubikinhalt derselben seyn? Nach angestellter Rechnung findet man den Inhalt für den größern

Digitized by Google

Durchmesser $565\frac{1}{5}$‴, den Inhalt für den kleinern $251\frac{1}{5}$‴; Rest für den Inhalt der Röhre 314‴.

345. Aufgabe. Durch den Kubikinhalt und einen Factor desselben den andern Factor zu finden, aus welchen beyden der Kubikinhalt des Körpers besteht.

Man dividire den gegebenen Kubikinhalt mit dem bekannten Factor, so kommt der andere zum Vorschein, welcher durch die Multiplication mit dem ersten den gegebenen Kubikinhalt ausmacht; denn das Product wird durch die Division in die nämlichen Factoren zerlegt, aus welchen es durch die Multiplication entstanden ist.

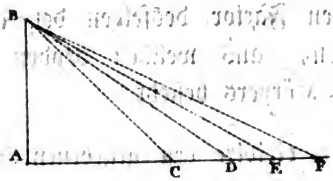
Beyspiele. Der kubische Inhalt eines Prisma sey 320‴, seine Höhe 5′; so gibt 5, in 320 dividirt, die Grundfläche von 64▪″.

Der Inhalt eines Kegels halte 540‴, die Grundfläche 60▪″; so muß 540 mit 60 dividirt, und das Product mit 3 multiplicirt werden, welches 27′ als die Höhe des Kegels gibt. Auf eine ähnliche Art kann man auch bey andern Körpern verfahren.

Ist der Kubikinhalt einer Kugel bekannt, und man will den Durchmesser wissen; so muß der Inhalt mit 6 und 100 multiplicirt, und mit

Digitized by Google

314 dividirt werden, wodurch der Kubus des Durchmessers entsteht, aus welchem man, um den Durchmesser selbst zu erhalten, die Kubikwurzel ausziehen muß.



346. **Aufgabe.** Einen Visirstab zu verfertigen, womit man finden kann, wie viel Maß ein Faß, oder ein anderes cylindrisches Gefäß in sich halte.

Man messe den Durchmesser eines cylindrischen Maßgefäßes, und trage ihn auf zwey unter einem rechten Winkel zusammen gesetzte Linien von **A** nach **B** und **C**; ziehe die Hypotenuse **BC**; so ist diese der Durchmesser einer Fläche, auf welcher zwey Maß von der nämlichen Höhe stehen können; weil das Quadrat der Hypotenuse **BC** eben so groß ist, als die Quadrate von **AB** und **AC** zusammen genommen, und die Quadrate der Durchmesser sich wie die Kreisflächen verhalten. Man trage ferner **BC** von **A** nach **D**, und ziehe **BD**; so ist dieß der Durchmesser eines dreymaßigen Gefäßes von gleicher Höhe, weil **AD** zwey, **AB** aber eine Maß; folglich beyde mit einander drey Maß geben. Es gibt also **EB**

Digitized by Google

vier, **FB** fünf Maß u. s. w. Auf diese Art fahre man fort, bis man eine hinlängliche Anzahl Durchmesser aufgezeichnet hat, die man alsdann auf Eine Seite eines viereckigen Stabes trägt; auf die andere Seite wird die Höhe des Maßgefäßes so oft aufgetragen, als es nöthig scheint.

Mißt man nun mit diesem Maßstabe ein cylindrisches Gefäß, so zeigt der Durchmesser-Maßstab an, wie viele Maße auf der untern Kreisfläche stehen können; das Längenmaß aber, wie viele Maße auf einander stehen. Man braucht also nur beyde Theile mit einander zu multipliciren; so hat man die Anzahl von Maßen, welche in einem cylindrischen Gefäße enthalten sind. Hat z. B. der Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes 6, die Höhe 10 Theile; so hält das Gefäß 60 Maß.

Um ein Faß auszurechnen, muß die Bodenhöhe, und die Spundhöhe addirt, und das Product halbirt werden, wodurch man den mittlern Durchmesser erhält, den man mit der Länge des Faßes multipliciren kann. Dieses Verfahren kann aber nach dem, was Seite 204, Nro. 338. gesagt wurde, nur in Fällen angenommen werden, wo keine zu große Genauigkeit erfordert wird.

347. **Aufgabe.** Maßstäbe zu verfertigen, womit man verschiedene prismatische Gefäße ausmessen kann.

Digitized by Google

Will man Gefäße, worin flüssige Materien aufbehalten werden, z. B. Wasserbehälter u. dgl. ausmessen; so nehme man ein Gefäß mit einem quadratischen Boden, und gieße in dasselbe eine Maß Wasser, trage die Seite des Quadrates von dem Gefäße auf einen viereckigen Stab so oft, als es zum Ausmessen nöthig scheint; wende dann den Stab um, und trage die Höhe des Wassers in dem Gefäße eben so oft auf die andere Seite des Stabes; so gibt dieß einen Maßstab zum Ausmessen der flüssigen Materien.

Der Gebrauch dieses Maßstabes ist wieder wie bey dem vorhergehenden. Man mißt nämlich mit der Seite des Stabes, worauf die Seite der Grundfläche enthalten ist, die Länge und Breite, das ist, die Grundfläche des Wasserbehälters; und mit der Seite des Stabes, wo die Höhe des Wassers angemerkt ist, die Höhe desselben: so findet man durch die Multiplication dieser beyden die Anzahl von Maßen, oder Eimern, welche in dem Behältnisse vorhanden sind.

Es läßt sich leicht einsehen, daß man auf diese Art Maßstäbe für das Schäffelmaß, um Fruchtbehälter auszumessen, und noch andere zu verschiedenem Gebrauche verfertigen könne.

Digitized by Google

348. **Aufgabe.** Das Brenn- und Bauholz auszurechnen.

Das Brennholz wird in Klaftern nach dem Kubikmaße verkauft. Die Klafter hält 6′ Höhe und 6′ Breite; die Dicke aber, oder die Scheiterlänge ist nicht überall gleich. Manchmal hält sie 6′, manchmal 4′, auch $3\frac{1}{2}$′ und 3′, so wie es in jedem Orte eingeführt ist.

Sind die Scheiter 6′ lang, so erhält man 216″. Sind sie 4′ lang, so hat man 144″; sind sie $3\frac{1}{2}$′, so gibt dieß 126″; und 3′ Länge gibt 108″.

Da aber beym Aufrichten des Holzes zwischen den Scheitern Raum entsteht; so muß dieser wohl in Betracht gezogen werden. Durch Beobachtung hat man gefunden, daß die Anzahl von Kubikschuhen des Stammholzes sich, wenn es gespalten, und in dem gewöhnlichen Klaftermaße gemessen wird, um ein Drittheil vermehret. Es geben also 2″ Stammholz 3″ Klafterholz, wo der Raum mitgerechnet ist. Hat man nun einige Stämme, welche z. B. 2340″ Stammholz geben, und will wissen, wie viel man Kubikschuhe Scheiterholz bekomme; so steht die Rechnung nach obigem Verhältnisse so:

x″ Klafth.	2340″ Stammh.
2″ St.	3″ Kl.

Antw. 3510″ Klafterholz.

Nach der Regel Detri:

Stammh.	Klafth.	Stammh.
2″	3″	2340″

Antw. 3510″ Klafterholz.

Will man nun wissen, wie viel dieß Klaftern ausmache, wenn z. B. die Scheiter $3\frac{1}{2}'$ Länge haben, so muß die obige Zahl durch 126 dividirt werden, weil eine Klafter, zu 6′ Länge, 6′ Breite und $3\frac{1}{2}'$ Dicke, 126″ in sich hält, wie wir bereits oben gesehen haben. Man erhält also nach vorgenommener Division aus den obigen 3510″ Klafterholz $27\frac{108}{126}$ Klafter. Sucht man den Bruch in Viertelsklaftern, welches hinlänglich genau ist; so erhält man $27\frac{3}{4}$ Klafter.

Die Stämme sind entweder walzenförmig oder gestümmelte Kegel, und müssen folglich als solche berechnet werden. Bey den letztern gibt, nach Vierenklee, die mittlere Kreisfläche, multiplicirt mit der Länge, den kubischen Inhalt, wie wir bereits Nro. 337. gezeigt haben. Für die Länge wird gleich die Seite des Kegels genommen; weil sich die Achse nicht bequem messen läßt, und der Unterschied dieser beyden Längen keinen beträchtlichen Einfluß auf den Inhalt hervor bringt. Sollte die eben gezeigte Berechnungsart nicht hinreichend

Digitized by Google

genau befunden werden; so bediene man sich der Nro. 338. angezeigten.

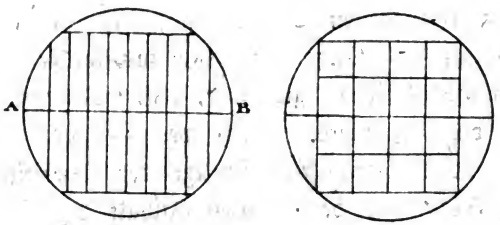
Beyspiel. Wie viel Kubikschuh Holz gibt ein Stamm, dessen Durchmesser am Stammende 2′, am Zopfe 12″ hält, und dessen Länge 30′ zehntheiliges Maß beträgt?

Macht man alles zu Zollen; so ist nach der ersten oben angezeigten Art der mittlere Durchmesser 16″, dessen Quadrat mit der Zahl 314, dann mit der Länge von 300″ multiplicirt, und durch 400 dividirt, gibt 60□″, 288□‴ als den Inhalt des Stammes. Nach der zweyten, Nro. 338. angeführten Art beträgt der Kubikinhalt 61□″, 544□‴ als den wahren Inhalt des Stammes, welcher also um 1□″, 256□‴ mehr ausmacht. Dieser Unterschied kommt bey Holzberechnungen in keinen Betracht. Wo aber die Länge des Stammes sehr vermehrt, und die beyden Durchmesser an ihrer Größe sehr verschieden sind, kann auch der Fehler weit beträchtlicher werden; daher in solchen Fällen die Nro. 338. vorgeschlagene Berechnungsart anzurathen ist.

Das Bauholz wird größtentheils nach dem laufenden Schuh, das ist, nach seiner Länge verkauft. Der Werth davon kann also sehr leicht gefunden werden, wenn man den Werth von Einem Schuh weiß.

Digitized by Google

Den Inhalt von zugehauenen Bauhölzern findet man, wenn man die Stämme entweder als Parallelepipeden; oder, wenn ihre Seitenflächen gegen eine Spitze zulaufen, als gestümmelte Pyramiden betrachtet. Das übrige Holz, wozu vorzüglich das Blochholz gehört, wird nach der Seltenheit und Schönheit der Stücke auch zu verschiedenen Preisen verkauft.

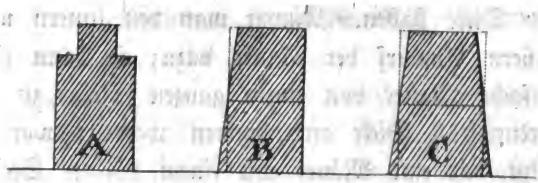


349. Aufgabe. Die Anzahl von Brettern, Riegeln und Latten zu finden, welche aus einem Stamme können geschnitten werden.

Man messe den Durchmesser, und zeichne den Umkreis auf; nehme zu beyden Seiten 2 Zoll für die Schwarten hinweg, fasse die Dicke der Bretter, und $\frac{1}{4}$ Zoll für den Sägeschnitt in den Zirkel, und trage sie auf den Durchmesser AB, so oft es angeht. Auf eine ähnliche Art kann man auch bey Riegeln und Latten verfahren.

350. Aufgabe. Den kubischen Inhalt von verschiedenen Mauern auszurechnen.

Digitized by Google



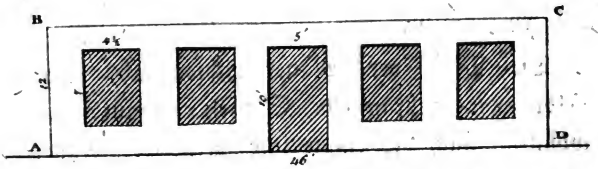
Der größte Theil von Mauern bey Gebäuden besteht aus Parallelepipeden, die entweder aus ihrer Grundfläche und Höhe, oder aus ihrer Durchschnittsfläche und Länge berechnet werden. Mauern mit Böschungen oder Schmiegen, wie **B** und **C**, lassen sich ebenfalls als Parallelepipeden berechnen; weil ihre Durchschnittsflächen aus Trapezen bestehen, die sich leicht in Parallelogramme verwandeln lassen. Eben so leicht kann der kubische Inhalt von runden Mauern gefunden werden, wenn man ihre Grundflächen, die von zwey Kreisen begränzt sind, ausrechnet, und mit den Höhen der Mauern multiplicirt. Die Art, Gewölbe auszurechnen, wird weiter unten vorkommen.

Die Dicke der Mauer richtet sich, wenn dieselbe von gebrannten Steinen gebaut wird, gewöhnlich nach der Länge und Breite der Mauersteine, die nicht in allen Orten gleiche Maße haben. Eine Mauer von einem ganzen Mauersteine, welcher in unserer Gegend 14″ Länge 7″ Breite und $2\frac{1}{2}$″ Dicke hält, wäre also vierzehn Zoll dick. Eine Mauer von $1\frac{1}{2}$ Stein würde demnach 21″, und eine von 2 Steinen

Digitized by Google

28″ Dicke haben. Nimmt man den innern und äußern Anwurf der Mauer dazu; so kann eine einfache Mauer von einem ganzen Steine zu 12 Decimalzoll Dicke angenommen werden; woraus folgt, daß eine Mauer mit einem halben Steine 6″, eine mit 1½ Steine 18″, mit 2 Steinen 24″, mit 3 aber 36″ Decimalmaß Dicke in sich hält, wodurch der kubische Inhalt solcher Mauern leicht gefunden wird. Die Dicke dieser Mauern sind zwar nicht nach der größten Schärfe angegeben; aber doch zur Berechnung des Materials hinreichend genau; weil man durch das ungleiche Bearbeiten desselben doch nie eine vollkommene Richtigkeit erhalten kann.

Da die Mauern gewöhnlich von einem Stockwerke zum andern in ihrer Dicke abnehmen; so ist man gezwungen, jedes Stockwerk besonders auszurechnen.



Beyspiel. Es soll der kubische Inhalt von den Mauern des untern Stockwerkes eines bürgerlichen Wohngebäudes gefunden werden, welches 46′ Länge, 12′ Höhe hat, und wovon die vordere und hintere Mauer gleiche Eintheilung

und Dicke, nämlich 2 Steine oder 24″ Decimalmaß enthalten.

Man suche den Quadratinhalt von der ganzen Fläche **ABCD**, ziehe den Flächeninhalt der Fenster und Thüren davon ab, und multiplicire den Rest mit der Dicke der Mauern; so kommt der kubische Inhalt hervor.

Es hält also die ganze Fläche **ABCD** nach den oben bestimmten Maßen 552□′; der Flächeninhalt der 4 Fenster, wovon die Breite eines jeden $4\frac{1}{2}$′, und die Höhe 7′ beträgt, 126□′; die Fläche der Thür, welche 5′ breit, und 10′ hoch ist, hält 50□′; mithin Fenster und Thüren zusammen 176□′, welche von den obigen 552□′ abgezogen, 376□′ Rest für die Mauerfläche geben. Wird dieser mit 24″ Dicke multiplicirt; so erhält man 902□′ 400□″ Inhalt für die Mauer, wenn sie durchaus gleiche Dicke hat.

Weil die hintere Mauer der vordern in der Größe der Fenster und Thüren gleich ist; so wird der Inhalt doppelt genommen, und die beyden Seitenwände sowohl, als die innern Scheidewände, welche auf die nämliche Art ausgerechnet werden, dazu addirt, wodurch der Kubikinhalt des ganzen Stockwerkes entsteht.

351. Anmerkung. Die Schmiegen bey Fenstern und Thüren kommen bey Ausrechnung der Mauern nicht in Anschlag; weil durch das Behauen der Steine eben so viel Material zu

Digitized by Google

Grunde geht, als man gebrauchen würde, wenn die Pfeiler rechtwinklig aufgemauert würden.

352. Aufgabe. Die Anzahl von Mauersteinen zu finden, welche zu einer Mauer oder zu einem ganzen Gebäude erfordert werden.

Dieses kann bey gebrannten Steinen am leichtesten durch die bloße Quadratrechnung geschehen, wenn man weiß, wie viele Steine auf einen Quadratschuh, oder auf eine Quadratklafter kommen.

Der gewöhnliche Ziegelstein hält in unserer Gegend 14 Zoll Länge, 7 Zoll Breite, und $2\frac{1}{2}$ Zoll Dicke. Betrachtet man eine Mauer von 6 Schuh Länge und 6 Schuh Breite, das ist, eine Quadratklafter, die 1 Stein oder 14 Zoll Dicke enthält; so wird man finden, daß dieselbe ungefähr 220 Steine in sich hält, wonach man die gefundenen Quadratschuhe erst in Quadratklafter verändern müßte. Da nach dieser Bemerkung $6\frac{1}{2}$ Stein auf einen Quadratschuh kommen, so findet man die Anzahl von Ziegelsteinen am bequemsten, wenn man die gegebene Anzahl von Quadratschuhen mit 6 multiplicirt, von der Zahl der Quadratschuhe die letzte Ziffer abschneidet, und die vorstehenden Zahlen zu den gefundenen Steinen addirt, welches eben so viel ist, als wenn man jedem Tausend von Quadratschuhen 100 Steine zugeben wollte.

Digitized by Google

Beyspiel. Man hat eine Mauer von 2624□′ aufzuführen, die 1 Stein Dicke hält; wie viel wird man Steine dazu brauchen?

262,4□′
6
15744
262
16006 Steine.

Diese Rechnung bleibt allemal, die Mauern mögen eine Dicke haben, welche sie wollen. Denn bey einem halben Stein Dicke wird die gefundene Zahl durch 2 dividirt, bey 1½ Stein Dicke wird die Hälfte der gefundenen Zahl addirt, bey 2 Steinen die gefundene Zahl doppelt genommen, und so weiters; wodurch man die Anzahl der Steine immer auf eine sehr leichte Art ohne alle Bruchrechnung erhält. Da die Kaminsteine bey uns ebenfalls 14 Zoll Länge und 2½ Zoll Dicke haben und mit diesen nur nach dem halben Stein gemauert wird, so gilt die obige Rechnung auch für diese Art Steine.

Wäre die Größe der Mauern in Kubikschuhen gegeben, so könnte man das nämliche Verfahren beobachten; nur daß man hier mit der Zahl 5 anstatt mit der Zahl 6 multipliciren müßte, weil der Kubikfuß nur 12 Zoll Dicke hält; bey der obigen Steinlänge aber 14 Zoll in Rechnung kommen, daher der Kubikfuß auch nur etwas

Digitized by Google

mehr, als 5 Steine in sich hält. Der etwaige kleine Unterschied kann in beyden Rechnungen um so weniger einen Einfluß haben, als am Ende gewöhnlich noch der übrig gebliebene Bruch zu einem ganzen Tausend von Steinen angenommen wird.

Der kubische Inhalt der Mauern ist auch dann nöthig, wenn mit Bruchsteinen gemauert wird. Die Bruchsteine werden in den Steinbrüchen zu verschiedenen Maßen oder Kubikklaftern verkauft. Ein Maß solcher Steine zu 16 Schuh Länge und Breite, und 2 Fuß Dicke gibt 512$^{c'}$, welche aber der Erfahrung gemäß nur 350$^{c'}$ Mauer geben. Hieraus kann wieder die Anzahl von Bruchsteinen für eine Mauer berechnet werden.

Beyspiel. Es halte eine Mauer 6420$^{c'}$; wie viel wird man Maße Bruchsteine zu 16′ Länge und Breite, und 2′ Dicke brauchen?

x Maße	6420$^{c'}$
350$^{c'}$	1 Maß.

Antw. $18\frac{1}{35}$ Maß.

Nach der Regel Detri:

Mauer	Maß	Mauer?
350$^{c'}$	1	6420$^{c'}$

Antw. $18\frac{1}{35}$ Maß.

Ist daß Maß der Bruchsteine von dem obigen verschieden, z. B. 15′ Länge und Breite,

und 2′ Dicke; so geben diese 450″ Bruchsteine. Es wird also auch hier die Anzahl dieser Maße nach dem obigen Verhältnisse gefunden.

Beyspiel. Wie viel Maße Bruchsteine braucht man zu einer Mauer von 6420″, wenn ein Maß 15′ Länge und Breite, und 2′ Dicke oder 450″ hält.

Man suche zuvor die Anzahl von Kubikschuhen der rohen Bruchsteine, welche zur Aufführung einer solchen Mauer nöthig sind auf folgende Art:

x″ Bruchst.	6420″ Mauer.
350″ Mauer.	512″ Bruchst.

Antw. $9391\frac{19}{35}$″ Bruchst.

Nach der Regel Detri:

Mauer	Bruchst.	Mauer?
350″	512″	6420″

Antw. $9391\frac{19}{35}$″ Bruchst.

Diese Zahl mit Hinweglassung des Bruches, durch 450″ dividirt, gibt $20\frac{391}{450}$ Maße.

353. Aufgabe. Die Menge von Kalk und Sand zu finden, welche zu einer Mauer oder einem Gebäude nöthig ist.

Man hat durch die Beobachtung gefunden, daß man zu 1000 gebrannten Steinen vom obigen Maße eine Muth Kalk und 4 Fuhren Sand zu 2 Pferden nöthig hat; womit aber auch der Anwurf eingerechnet ist. Weiß man also, wie

Digitized by Google

viele tausend Steine zu einem Gebäude nöthig sind; so ist auch die Menge von Kalk und Sand bekannt. In Orten, wo die Maße der Steine verschieden sind, muß auch die Beobachtung besonders gemacht werden. Bruchsteine bedürfen mehr Kalk und Sand, als gebrannte Steine; weil sie sich nicht so genau an einander legen lassen. Da sich aber dieses nach der Größe der Stücke richtet, die vermauert werden sollen; so kann man von einer Muth Kalk eine Mauer aufführen lassen, und ihren kubischen Inhalt berechnen, wodurch man finden wird, wie viel eine Muth Kalk Kubikschuhe Mauer gibt. Nach diesem Verhältnisse richtet man sich in der Folge durchgehends.

354. Aufgabe. **Die Anzahl der Tage, in denen eine Mauer kann aufgeführt werden, und das Taglohn der Maurer zu berechnen.**

Man rechnet auf einen Maurer des Tages 200 Steine zu vermauern, zuzuhauen und zu verputzen. Hat man also die Anzahl von Steinen, die zu einer Mauer nöthig ist; so kann man aus selben die Anzahl der Tage, und daraus auch das Taglohn der Maurer berechnen.

355. Aufgabe. **Den Kubikinhalt der Erde zu finden, die bey den Grundmauern oder Kellern ausgegraben wird.**

Digitized by Google

Man suche die Oberfläche des Grabens, und multiplicire sie mit der Tiefe desselben.

Weiß man, wie viele Kubikschuhe ein Mann des Tages ausgräbt; so kann wieder die Anzahl der Tage, und der Kostenbetrag ausgerechnet werden. Dabey hat man aber zu bemerken, daß die Arbeit in der Tiefe bey weitem nicht so geschwind von Statten gehe, wie auf der Oberfläche, und daß gewöhnlich ein Theil der Seitenwände beym Ausgraben mit in die Tiefe fällt, der die Menge des auszugrabenden Erdreiches vermehrt. Das feste Erdreich verhält sich zum lockern, welches ausgegraben wird, wie 10 zu 17, oder 10‴ feste Erde geben 17‴ lockere.

356. Aufgabe. Die Anzahl von Dachplatten zu finden, die zu einem Ziegeldache nöthig sind.

Weil die Latten bey einem solchen Dache einen halben Schuh weit aus einander zu stehen kommen; so liegen auf einer Linie von 10 Schuhen der Höhe nach 20 Dachplatten. Weil ferner eine Platte in unserer Gegend 8″ Breite hält; so kommen auf 10 Schuh 15 Platten der Breite nach zu stehen. Es halten daher 100□′ 15 mal 20, das ist 300 Platten; folglich 1□ 3 Platten. Um also ihre Anzahl zu einem Dache zu finden, braucht man nur den Inhalt desselben in Qua-

Digitized by Google

dratschuhen zu suchen, und ihn mit 3 zu multipliciren.

Aus der Anzahl der Dachplatten kann wieder die zum Aufhängen derselben nöthige Anzahl von Latten gefunden werden.

Denn, haben z. B. die Latten in ihrer Länge 20′, so kommen auf eine Latte 30 Dachziegel zu stehen. Dividirt man also die Anzahl der Dachziegel durch 30; so kommt die dazu nöthige Anzahl von Latten zum Vorschein.

357. Aufgabe. Die Anzahl des zu einem Dachstuhle nöthigen Bauholzes zu bestimmen.

Weil die Balken oder Trame gewöhnlich 3 Schuh aus einander liegen, und an den beyden Enden einer liegen muß; so wird die ganze Länge des Gebäudes mit 3 dividirt, und 1 addirt, wodurch die Anzahl der Balken hervor geht. Die Zahl der Rafen oder Sparren ist doppelt so groß, als die der Balken, zu welchen noch die beyden Mauerbänke hinzu kommen. Hat das Dach Kehlbalken oder Spitzbänder; so ist ihre Anzahl eben so groß, als die Anzahl der Balken. Befindet sich in dem Dache ein liegender oder stehender Stuhl; so richtet sich außer den Schwellen und Pfetten die Anzahl der Säulen, und der dazu gehörigen Spannriegel, Schwenk- und Kreuzbüge nach der Anzahl der Balken, indem meisten-

Digitized by Google

theils nach vier Balken wieder ein Bund zu stehen kommt. Bey den Walmdächern ist außer den Gradsparren die Menge des Holzes nicht beträchtlich verschieden. Die Länge der Hölzer wird durch Aufzeichnung eines Lehrgesperres auf dem verjüngten Maßstabe gefunden; so wie sich überhaupt aus der Zeichnung des Werksatzes, und Lehrgesperres eines jeden Dachwerkes die Anzahl der Hölzer, aus diesen der Arbeitslohn, und der ganze Kosten des Daches am leichtesten bestimmen läßt.

358. Aufgabe. Die Anzahl von Brettern oder Tafeln zu bestimmen, die zur Bedeckung eines Bodens nöthig sind.

Man rechne den Quadratinhalt einer Tafel aus, und dividire ihn in den Quadratinhalt des ganzen Bodens.

Eben so wird auch die Anzahl von Marmor- und andern Steinplatten gefunden, die zur Pflasterung eines Bodens nothwendig sind, wenn man den Quadratinhalt von einer Platte in den des Bodens dividirt.

Die Anzahl von Latten zu einer Decke oder einem Rohrboden erhält man ebenfalls durch die Division des Flächeninhaltes einer Latte, mit ihrem zugehörigen Zwischenraume in den des Rohrbodens.

Digitized by Google

359. Um die Menge des Mörtels, welcher aus einem Theile Kalk und drey Theilen Sand besteht, zu finden, die zu einer Decke nöthig ist, muß man zuvor beobachten, wie viel zu einer gewissen Anzahl von Quadratschuhen gebraucht wird, und von dieser auf den Quadratinhalt der Decke schließen.

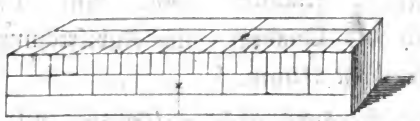
360. Die übrigen Theile des Gebäudes, als Fensterrahmen, Thüren, Schmied-, Schlosser- und Glaser-Arbeit, werden an die verschiedenen Handwerksleute für bestimmte Bezahlung verdingt. Aus diesem Ganzen entsteht der Kostenüberschlag eines Gebäudes, dem man aber, um alle unvorhergesehenen Fälle bestreiten zu können, noch einen sechsten Theil aller Kosten zugibt.

361. **Anmerkung.** Weil in einigen Orten das Klaftermaß zu 6′, und in andern die Ruthe zu 12′ Länge eingeführt ist; so hat man hier bloß alles in Schuhen anzeigen wollen, woraus nach Bedarf die Klaftern und Ruthen leicht können gezogen werden. Die Quadrat- und Kubikrechnung wird sonst in Baugeschäften auch nach dem zwölftheiligen Maße angewendet. Um den beständigen Reductionen, die dieses Maß verursacht, auszuweichen, hat man die Toisir- oder Klafterrechnung eingeführt, die in geklafterten Schuhen und Zollen geschieht. In den Orten, wo nach Ruthen gerechnet wird, geschieht dieß in Riemenruthen, Riemenschuhen ꝛc. Da diese Rech-

Digitized by Google

nungsarten nicht überall gleich sind, und vielerley Regeln erfordern, in den öffentlichen Schulen auch seltner gelehrt werden; so hat man sich bewogen gefunden, die Decimal-Rechnung wegen ihrer Leichtigkeit und Einfachheit für alle geometrischen Vorfälle beyzubehalten.

Damit man aber die vorkommenden Baurechnungen in allen Fällen mit der gehörigen Leichtigkeit führen könne; so ist vor Allem nothwendig, daß man sich auf einem Stabe den landesüblichen Werkschuh genau in seine 12 Zoll, und jeden Zoll wieder in 12 Linien eintheile. Auf die daran stoßende Seite dieses Stabes theile man den nämlichen Schuh in 10 Zoll, und jeden Zoll wieder in 10 Linien nach Art der beyliegenden Zeichnung, welche die Eintheilung von 2 Zollen beträgt.



Auf diesem Maßstabe kann man ohne Rechnung finden, wie viel im Längenmaße eine gewisse Anzahl Decimalzolle und Linien im bürgerlichen Maße beträgt. Läßt man im Quadratmaße die Linien Zolle gelten; so findet man auch die Quadratzolle des Decimalmaßes im bürgerlichen Maße durch die gegenüber stehenden Linien

Digitized by Google

auf dem Stabe. Weil die Kubikzolle nach einer vollendeten Materialberechnung selten einen Ausschlag geben, und daher von keiner Wichtigkeit sind; so kommt auch ihre Reduction in keinen Betracht.

Sind in der Berechnung des Materials die Theile eines Gebäudes im zwölftheiligen Maße nach ihrer Länge, Breite und Dicke gegeben; so sehe man nur auf dem Stabe, wie viel diese Maße im Decimalmaße betragen. Dabey mache man sich zur Regel, nur in Schuhen und Zollen zu rechnen, und alle Linien, die weniger, als einen halben Zoll betragen, zu verwerfen; diejenigen aber, welche mehr, als einen halben Zoll betragen, als einen ganzen Zoll anzunehmen, welches wegen des unbedeutenden Ausschlages, den sie auf das Materiale geben, ohne Anstand geschehen kann. Auf diese Art wird man die Quadrat- und Kubikrechnung sehr leicht fortführen können.

Sind Gebäude nach gezeichneten Planen zu berechnen; so theile man den dabey befindlichen Schuh in zehn Theile, und nehme die Maße auf diesem Maßstabe ab.

362. **Anmerkung.** Obschon die Geometrie hinreichend gewesen wäre, die bisherigen Aufgaben über Baugegenstände ohne weitere Erklärung aufzulösen; so hat man sich doch zum Nutzen

Digitized by Google

der Anfänger etwas weiter darüber ausdehnen wollen.

Sollten die obigen Berechnungen nach dem neuen französischen Maße bewerkstelliget werden; so kann dieses, weil das Maß zehntheilig ist, eben so wenig Schwierigkeit verursachen.

363. **Aufgabe.** **Durch die Kubikrechnung die Schwere homogener, das ist, durchaus gleichartiger Körper zu finden.**

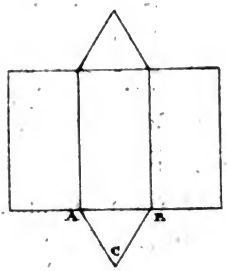
Man nehme einen prismatischen Körper von Holz, Stein, Eisen, Bley ꝛc., rechne seinen Kubikinhalt aus, wiege ihn genau, und suche darnach das Gewicht eines Kubikschuhes; so hat man das Verhältniß, aus welchem man das Gewicht von mehreren Kubikschuhen finden kann. Diese Berechnung kann in vielen Fällen zur Bestimmung der Lasten für das Fuhrwerk gute Dienste leisten.

Entwickelung der Oberflächen der Körper, oder Zeichnung der Körpernetze.

364. **Erklärungen.** Wenn die Flächen, die einen Körper umgeben, so an einander hangend dargestellt werden, daß sie bey einer richtigen Zusammenbeugung einen hohlen Körper bilden, so nennt man diese Zeichnung das Netz

Digitized by Google

eines Körpers. Diese Netze dienen, theils hohle Körper zusammen zu setzen, theils auch andere mit dünnen Körpern zu überziehen, oder verschiedene Zeichnungen auf ihre Oberflächen zu bringen.



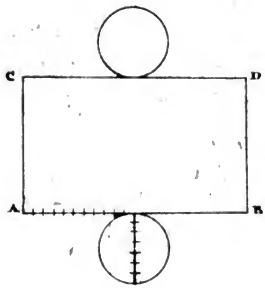
365. **Aufgabe.** Das Netz zu einem senkrechten Prisma zu zeichnen.

Man macht zuvor die Grundfläche **ABC**, hier ein gleichseitiges Dreyeck, und erhebt aus **AB** zwey senkrechte Linien, denen man die Höhe des Prisma gibt; an diese zeichnet man die übrigen Seiten des Prisma nach der Anzahl der Seiten in der Grundfläche, und hängt die obere Fläche daran; so lassen sich diese Flächen zu einem hohlen Körper zusammen biegen, und bilden ein Prisma.

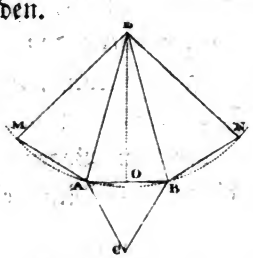
Die Netze zu Parallelepipeden und vieleckigen Prismen werden auf eine ähnliche Art verfertiget.

366. **Aufgabe.** Das Netz zu einer senkrechten Walze zu zeichnen.

Digitized by Google



Man theile den gegebenen Durchmesser in sieben gleiche Theile, und trage davon 22 auf eine gerade Linie **AB**; ziehe **AC** und **BD** senkrecht, trage die Höhe der Walze darauf, schließe das Parallelogramm mit der Linie **CD**, und hänge unten und oben die Kreisflächen nach dem gegebenen Durchmesser daran. Der Umkreis **AB** kann auch nach dem gegebenen Durchmesser durch Rechnung gefunden, und nach dem Maßstabe aufgetragen werden.

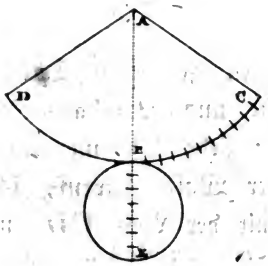


367. **Aufgabe.** Das Netz zu einer dreyeckigen senkrechten Pyramide zu machen.

Wenn man die Grundfläche **ABC** verfertigt hat; so trägt man die Höhe einer Seite

Digitized by Google

von **O** nach **D**, und macht mit **AD** einen Bogen aus der Spitze der Pyramide, auf welchem man die Länge **AB** von **A** in **M**, und **BC** von **B** in **N** abschneidet, und mit **D** verbindet. Auf eine ähnliche Art werden auch die Netze von mehrseitigen Pyramiden verfertiget.



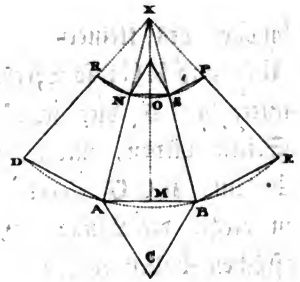
368. **Aufgabe.** Das Netz eines senkrechten Kegels zu zeichnen.

Man trage die Länge von der Seite des Kegels auf eine senkrechte **AB**, und mache damit einen Bogen **CBD**; theile den Durchmesser der Grundfläche in 7 gleiche Theile, trage von **B** nach **C** und **D** 11 solche Theile, ziehe die Linien **CA** und **DA**, und an dem Bogen die Grundfläche **BE**; so ist dieses das Netz eines senkrechten Kegels.

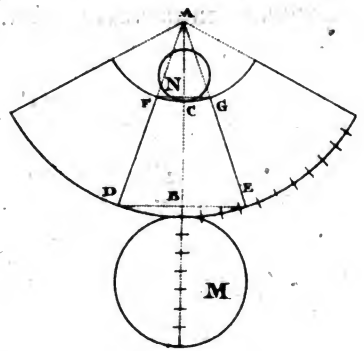
369. **Aufgabe.** Das Netz einer gestümmelten senkrechten Pyramide zu verfertigen.

Man mache die Grundfläche **ABC**, trage die Länge einer Seite von **M** nach **O**, und ziehe nach der Linie **NS** das obere ähnliche Drey-

Digitized by Google



eck; verbinde **AN** und **BS** mit Linien, die man verlängert, bis sie sich bey **X** durchschneiden; aus dem Punkte **X** mache man mit **XA** die Bogen **DABE**, und **RNSP**; trage die Seiten der beyden Dreyecke darauf, und verbinde sie mit Linien.



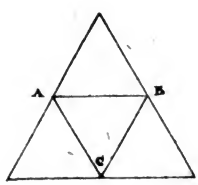
370. **Aufgabe.** Das Netz eines gestümmelten senkrechten Kegels zu verfertigen.

Man ziehe eine gerade Linie **AB**, trage von **B** nach **C** die Höhe von der Achse des gestümmelten Kegels, und aus **B** nach **D** und **E** die Halbmesser des größern, aus **C** nach **F** und

Digitized by Google

G aber die Halbmesser des kleinern Kreises, und ziehe die Linien **DF** und **EG**; so werden sich diese in dem Mittelpuncte bey **A** durchschneiden, und die Länge der Seiten bilden, mit welchen man die Bogen **DBE** und **FCG** ziehen kann, die wie oben bey dem Kegel die Länge des Umkreises der beyden Kreisflächen haben müssen, an welche man die untere und obere Kreisfläche **M** und **N** anhängt.

Die Ursache dieses Verfahrens sieht man leicht ein, wenn man betrachtet, daß zwey aus den Endespuncten der beyden Durchmesser eines gestümmelten Kegels gezogene Linien sich nothwendig im Mittelpunkte durchkreuzen müssen.

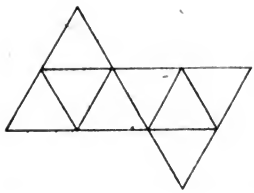


371. **Aufgabe.** Das Netz zu einem Tetraedrum zu machen.

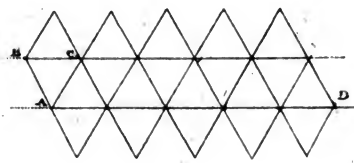
Man ziehe ein gleichseitiges Dreyeck **ABC**, und an jede Seite desselben ein anderes von gleicher Größe.

372. **Aufgabe.** Das Netz eines Oktaeders zu verfertigen.

Digitized by Google

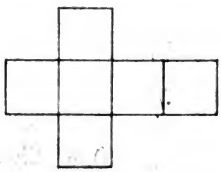


Man mache zwey zusammenhängende Netze eines Tetraeders auf die Art, wie die Figur zeigt.



373. **Aufgabe.** Das Netz eines Ikosaeders zu zeichnen.

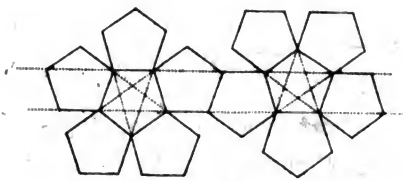
Da dieses aus zwanzig gleichseitigen Dreyecken besteht, so wird zuvor ein Dreyeck **ABC** gezeichnet, und die Parallellinien **AD** und **BE** nach der Höhe des ersten Dreyeckes gezogen, wo sich dann die übrigen Dreyecke nach Art der beystehenden Fig. durch Parallellinien ergeben.



374. **Aufgabe.** Das Netz eines Würfels zu verfertigen.

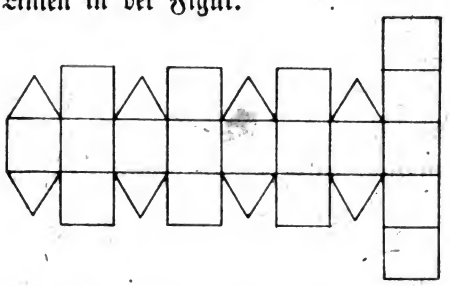
Digitized by Google

Man zeichnet sechs Quadrate, und hängt sie so zusammen, wie die Figur zeigt.



375. Aufgabe. Das Netz eines Dodekaeders zu zeichnen.

Man macht ein regelmäßiges Fünfeck, und an die Seiten desselben wieder fünf andere von gleicher Größe. Diese sechs Fünfecke werden zweymal gezeichnet, und mit einer Seite zusammen gehängt. Die Verfahrungsart zeigen die punktirten Linien in der Figur.

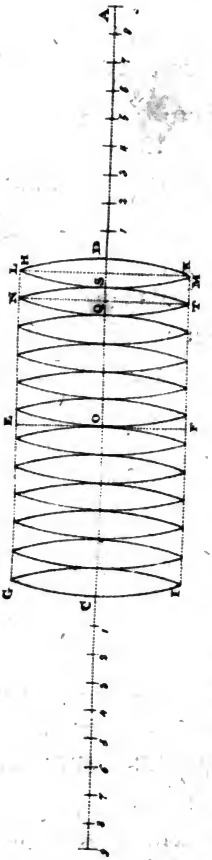


376. Aufgabe. Das Netz des Archimedischen Körpers zu zeichnen.

Da dieser aus 18 gleichen Quadraten besteht, so zeichne man dieselben alle an einander

Digitized by Google

hängend, und auf diese die 8 Dreyecke, wie die Figur zeigt.



377. Aufgabe. Das Netz zu einer Kugel zu zeichnen, wovon der Durchmesser gegeben ist.

Man theile den Durchmesser in 7 gleiche Theile, und trage 22 derselben auf die Linie **CD**; so stellt diese den Umkreis vor. Will man lieber den Umkreis durch Rechnung finden; so kann dieses hier wie bey der Walze und dem Kegel geschehen. Die Linie **CD** wird durch die senkrechte **EF** in zwey gleiche Theile getheilt, die halbe Länge von **OC** nach **E** und **F** getragen, und die beyden Parallellinien **GH** und **IK** gezogen. Man theilet dann die Linie **CD** in 12 gleiche Theile, und macht wieder von jedem

die Mittellinien **LM**, **NT** u. s. w. Von **D** gegen **A** werden neun gleiche Theile in der Länge der Linie **SD** aufgetragen, wo sich dann der Mittelpunkt des Bogens **MSL** in **A** befindet. Man setzt also den Zirkel in **A**, öffnet ihn bis **S**, und zieht den Bogen **MSL**; setzt ferner den Zirkel in 8, und macht den Bogen **TQN**, und so verfährt man, bis alle 12 Bogen verfertigt sind. Auf der entgegen gesetzten Seite wird die nämliche Verfahrungsart beybehalten, wodurch endlich das ganze Netz entsteht.

378. **Anmerkung.** Da die gewöhnlichen Zirkel nicht hinreichend seyn werden, um nur die Netze für mittelmäßige Kugeln zu verfertigen; so kann man sich des Stangenzirkels bedienen, welcher hier abgebildet ist.

Bey **C** ist ein spitziger Stift, den man in den Mittelpunkt einsetzt; bey **D** ein bewegliches Holz, welches auf- und abgeschoben, und der Bleystift durchgesteckt, bey **E** aber mit einer Schraube festgestellt werden kann. Mit diesem Instrumente, dessen man sich auch in der Mechanik bey großen Kreisen bedient, können die Netze der Kugeln nach beliebiger Größe gezeichnet werden.

Digitized by Google

Von der Ausrechnung der Oberflächen der Körper.

379. **Erklärung.** Die Netze geben einen deutlichen Begriff von den Flächen, mit welchen die Körper umgeben sind. Werden die einzelnen Flächen ausgerechnet, und zusammen addirt, oder, wenn sie alle gleich sind, nur eines ausgerechnet, und mit der ganzen Anzahl multiplicirt; so erhält man den Flächeninhalt von der Oberfläche eines Körpers.

380. **Aufgabe.** Den Inhalt der Oberflächen von senkrechten Prismen, Walzen, Pyramiden und Kegeln zu finden.

Weil das Prisma von lauter Parallelogrammen, und 2 Grundflächen eingeschlossen ist; so suche man den Flächeninhalt eines solchen Parallelogrammes, multiplicire ihn mit der Anzahl derselben, und addire die untere und obere Fläche dazu.

Die Oberfläche der Walze besteht aus einem Parallelogramme, das die Peripherie zur Grundlinie, die Höhe der Walze aber zur Höhe hat, und aus der obern und untern Kreisfläche. Sie kann also als ein Parallelogramm ausgerechnet, und zu dem Producte die Summe der beyden Kreisflächen addirt werden. Weil aber die Kreisfläche nach Seite 128, Nro. 228. erhalten wird, wenn man den halben Theil des Halb-

Digitized by Google

messers mit dem Umkreise multiplicirt, folglich die beyden gleichen Kreisflächen aus der Multiplication des ganzen Halbmessers, multiplicirt mit dem Umkreise, bestehen; so erhält man die Oberfläche einer senkrechten Walze am bequemsten, wenn man den Halbmesser zur Höhe der Walze addirt, und die Summe mit dem Umkreise multiplicirt.

Die Oberfläche der Pyramide besteht aus lauter Dreyecken, und aus der Grundfläche; man sucht also den Inhalt von einem Dreyecke, multiplicirt ihn mit der Anzahl derselben, und addirt zu dem Producte die Grundfläche.

Die gebogene Oberfläche des Kegels besteht aus lauter unendlich kleinen Dreyecken, von welchen die gesammte Grundlinie der Umkreis, und die Höhe die Länge der Seite ist. Es muß also der Umkreis mit der Länge der Seite multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt werden, wozu noch der Inhalt der Grundfläche kommt. Weil aber auch die Grundfläche aus der Multiplication des Umkreises mit dem Halbmesser, dividirt durch 2, und die gebogene Oberfläche ebenfalls aus der Multiplication des Umkreises mit der Länge der Seite, dividirt durch 2, besteht; so erhält man die Oberfläche des Kegels bequemer, wenn man den Halbmesser zu der Höhe der Seiten addirt, die Summe mit dem Umkreise multiplicirt, und das Product durch 2 dividirt.

Digitized by Google

381. Aufgabe. Den Inhalt von den Oberflächen senkrechter gestümmelter Pyramiden und Kegel zu finden.

Die Oberfläche einer gestümmelten Pyramide besteht aus lauter Paralleltrapezen. Man berechne also den Inhalt derselben nach Nro. 224. und addire die untere und obere Fläche dazu.

Die gebogene Oberfläche eines gestümmelten Kegels kann aus lauter unendlich kleinen Trapezen zusammengesetzt betrachtet werden, wovon nach Nro. 224. die mittlere Kreislinie, multiplicirt mit der Höhe der Seite des Kegels, den Flächeninhalt gibt, zu welchem die obere und untere Kreisfläche addirt wird.

382. Aufgabe. Die Oberfläche einer Kugel, eines Kugelausschnittes, eines Kugelabschnittes, und eines Kugelbandes zu finden.

Die Oberfläche der Kugel wird erhalten, wenn man nach Seite 198, Nro. 329. den Durchmesser zum Quadrat erhebt, mit der Zahl 314 multiplicirt und durch 100 dividirt.

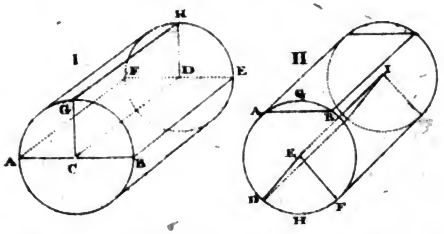
Die Oberfläche eines Kugelausschnittes wird gefunden, wenn man nach Nro. 330. die gebogene Oberfläche des Kugelstückes, und nach Nro. 389. die gebogene Oberfläche des damit verbundenen Kegels sucht, und beyde zusammen addirt.

Digitized by Google

Die Oberfläche eines Kugelabschnittes erhält man, wenn die gebogene Oberfläche eines Kugelstückes nach Nro. 330. und die damit verbundene Kreisfläche nach Nro. 228. ausgerechnet, und beyde zusammen addirt werden.

Die Oberfläche eines Kugelbandes erhält man nach Nr. 330.

Von dem Walzenschnitte und seiner Anwendung auf die Ausrechnung der Gewölber.

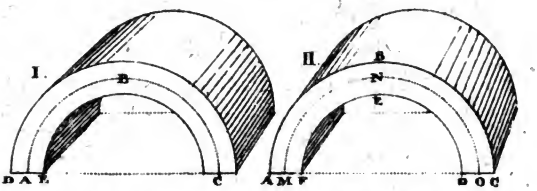


383. **Erklärung.** Fig. **I.** Wenn eine senkrechte Walze nach dem Durchmesser **AB** durch seine Achse **CD** von einer Fläche **ABEF** durchschnitten wird; so gibt der Schnitt zwey halbe Walzen. Schneidet man eine solche halbe Walze, nach der senkrechten Richtung des Halbmessers **GC**, nach **CD** und **GH**; so hat man eine Viertelswalze. Durchschneidet man Fig. **II.** eine Walze nach der Sehne **AB** gleichlaufend mit der Achse **EI**, so erhält man einen Walzenabschnitt; und wird dieselbe, nach zwey Halbmes-

Digitized by Google

fern **DE** und **EF**, nach der Achse **EI** geschnitten, so hat man einen Walzenausschnitt.

384. Weil man die gebogene Oberfläche einer Walze erhält, wenn man den Umkreis mit der Länge der Walze multiplicirt; so wird die Oberfläche einer halben Walze erhalten, wenn das obige Product durch 2, und die einer Viertelswalze, wenn dasselbe durch 4 dividirt wird. Nimmt man bey der Ausrechnung des halben Umkreises anstatt der Zahl 314 seine Hälfte 157; so kann die Division mit 2 erspart werden. Die gebogene Oberfläche eines Walzenabschnittes oder Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man bey dem ersten seinen Bogen **AGB**, und bey dem zweyten den Bogen **DHF** mit seiner Länge multiplicirt.

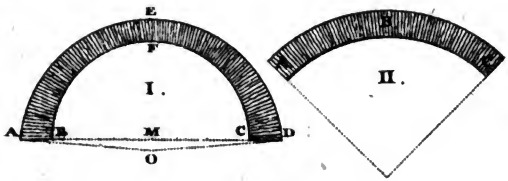


385. **Aufgabe.** Den Kubikinhalt eines Tonnengewölbes zu finden. Fig. I.

Man theile die Dicke des Gewölbes in zwey gleiche Theile; nehme **AC** zum Durchmesser, suche die gebogene Oberfläche des Gewölbes **ABC**, und multiplicire sie mit der Dicke desselben **DE**. Die Ursache dieses Verfahrens ist für sich klar.

Digitized by Google

Fig. II. Will man lieber die Fläche des Durchschnittes eines Tonnengewölbes **ABCDEF** ausrechnen, und mit der Länge des Gewölbes multipliciren; so erhält man ebenfalls den kubischen Inhalt desselben. Die Fläche des Durchschnittes aber erhält man, wenn man die mittlere halbe Kreislinie **MNO** mit der Dicke **AF** multiplicirt; weil sich die ganze Fläche, als aus unendlich vielen kleinen Trapezen zusammen gesetzt, betrachten läßt.



386. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt eines Tonnengewölbes zu finden, welches an den Widerlagen dicker ist, als am Schlußsteine. Fig. I.

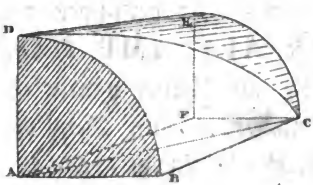
Die Linien **AB** und **CD** zeigen die Dicke der Widerlagen; **EF** aber die Dicke am Schlußsteine an. Man suche die Länge des innern und äußern Umkreises, addire beyde, und halbire die Summe; so hat man den mittlern halben Umkreis, welchen man, um die gebogene Oberfläche des Gewölbes zu erhalten, mit der Länge desselben multiplicirt. Wird ferner **AB** zu **EF** addirt, und die Hälfte dieser Summe mit der gebogenen Oberfläche multiplicirt; so geht da-

Digitized by Google

durch der kubische Inhalt des Gewölbes hervor. Es ist aber zu bemerken, daß der äußere Bogen **AED** kein halber Kreisbogen, sondern kleiner, als ein solcher ist; weil der Mittelpunkt desselben **O** unter dem Mittelpunkte **M** des kleinern Kreises liegt.

387. **Aufgabe.** Den körperlichen Inhalt eines Gewölbes zu finden, bey dem der Bogen kleiner, als der halbe Umkreis ist. **Fig. II.**

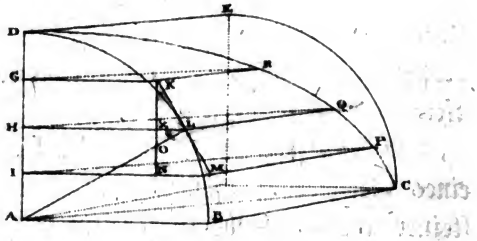
Man suche den ganzen Umkreis nach dem bekannten Halbmesser; multiplicire ihn mit der Anzahl der Grade des Bogens, welche man durch den Transporteur erhält, und dividire ihn durch 360: so kommt die Länge des Bogens **ABC** zum Vorscheine. Wird diese mit der Länge des Gewölbes, und mit der Dicke desselben multiplicirt; so erhält man den kubischen Inhalt des Gewölbes.



388. **Erklärung.** Schneidet man eine senkrechte Viertelswalze nach der Diagonallinie seiner Grundfläche **AC** in der senkrechten Richtung des Halbmessers **AD**; so nennt man den Theil **ADCB** einen Viertels-Walzenabschnitt, und das übrig gebliebene Stück **CDEF** das Com-

Digitized by Google

plement (Ergänzungsstück) eines Viertels-Walzenabschnittes.



389. Lehrsatz. Die gebogene Oberfläche eines Viertels-Walzenabschnittes **BCD** ist, gleich **AD** oder **AB**, multiplicirt mit **BC**, und also noch so groß, als seine Grundfläche.

Beweis. Man denke sich den ganzen Abschnitt parallel mit der Grundfläche in lauter gleiche, sehr kleine Theile zerschnitten; so sind **MLQP** und **LKRQ** Oberflächen dieser Theile, und die Dreyecke **ABC**, **IMP**, **HLQ** einander ähnlich, weil sie aus lauter parallelen Schnitten entstehen. Nimmt man nun Deutlichkeit halber den Bogen **KLM** als eine gerade Linie, oder Tangente des Bogens an, welches, wenn die Theile unendlich klein wären, ohne zu fehlen geschehen könnte; so gibt die Oberfläche **KRPM** ein Trapez, und **KM**, multiplicirt mit der mittlern Länge **LQ** den Flächeninhalt desselben. Es ist aber **KM**, multiplicirt mit **LQ**, gleich **GI**, multiplicirt mit **BC**, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.

Digitized by Google

Man ziehe **KN** senkrecht auf **IM**, und aus **A** den Halbmesser **AL**, so sind die Dreyecke **KNM**, und **LHA** einander ähnlich; denn der Halbmesser **AL** macht mit der Tangente **KM** bey **L** einen rechten Winkel; das kleine Dreyeck **KLO** ist also bey **L** rechtwinklicht, und wird nach Seite 151, Nro. 259. durch die aus der Spitze des rechten Winkels herabgelassene senkrechte **LX** in zwey ähnliche rechtwinklichte Dreyecke **KXL** und **LXO** getheilt. Es ist aber **LX** parallel mit **NM**; folglich das Dreyeck **KXL** ähnlich dem Dreyecke **KNM**. Ferner ist **XO** parallel mit **HA**; also auch **LXO** ähnlich **LHA**. Es sind daher auch die Dreyecke **LHA** und **KNM** einander ähnlich; folglich verhält sich:

$$LA:LH=KM:KN.$$

Setzt man anstatt **LA** die gleiche **AB**, und anstatt **KN** die gleiche **GI**, so ist

$$AB:LH=KM:GI.$$

In den ähnlichen Dreyecken **ABC**, und **HLQ** ist ebenfalls

$$AB:LH=BC:LQ.$$

Es ist also auch

$$KM:GI=BC:LQ,$$

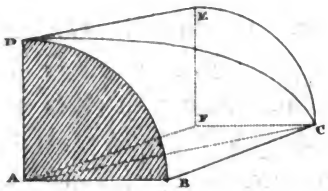
und die Producte der äußern und innern zwey Glieder

$$KM\times LQ=GI\times BC,$$

welches zu erweisen war.

Digitized by Google

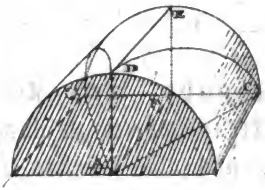
Da nun dieſes von allen abgeſchnittenen Stücken kann geſagt werden, und ihre geſammten Höhen den Halbmeſſer ausmachen; ſo iſt der Halbmeſſer **DA**, oder **AB**, multiplicirt mit **BC**, gleich der Oberfläche aller Trapezen, oder der gebogenen Oberfläche des Viertels-Walzenabſchnittes **DCB**, und daher noch ſo groß, als ſeine Grundfläche **ACB**.



390. Zuſatz. Die gebogene Oberfläche des Complementes eines Viertels-Walzenabſchnittes **DEC** erhält man, wenn man die gebogene Oberfläche des Abſchnittes **BCD** von der gebogenen Oberfläche der Viertelswalze **BCDE** abzieht, und iſt folglich der Unterſchied (Differenz) zwiſchen der gebogenen Oberfläche eines Viertels-Walzenabſchnittes, und der einer Viertelswalze. Da nun die Viertelswalze durch die Multiplication des Bogens **EC** mit der Länge **ED** erhalten wird; ſo gibt **ED**, multiplicirt mit **EC**, wovon **ED** oder **CB** multiplicirt mit **EF**, oder **AB** abgezogen werden ſoll, die Oberfläche **CDE**, oder $ED \times EC - ED \times EF = CDE$. Da aber in dieſer Berechnung zweymal mit **ED**

Digitized by Google

multiplicirt, und einmal diese Multiplication wieder abgezogen wird; so braucht man das Ganze nur einmal mit **ED** zu multipliciren, wodurch **EC — EF × ED = CDE** entsteht. Die gebogene Oberfläche des Complementes wird also gefunden, wenn man den Halbmesser **EF** von dem Bogen **EC** abzieht, und den Rest mit der Länge **ED** multiplicirt.

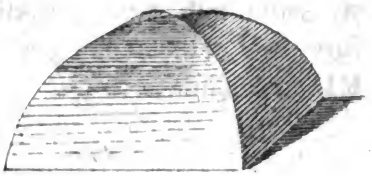


391. **Erklärung.** Schneidet man von einer senkrechten halben Walze, nach der Richtung ihrer Grundfläche **AC** und **AG**, zwey Viertels-Walzenabschnitte hinweg; so bleibt ein Körper **DCFGE** übrig, den man das Supplement (Ergänzungsstück) eines Halb-Walzenabschnittes nennet.

392. **Zusatz.** Theilt man dieses Supplement durch die Fläche **ADEF** in zwey gleiche Theile; so erhält man zwey Complemente von Viertels-Walzenabschnitten. Da nun die gebogene Oberfläche eines solchen Complementes gefunden wird, wenn man den Halbmesser **EF** von dem Bogen **EC** abzieht, und mit der Länge **ED** multiplicirt; so erhält man die gebogene Oberfläche des

Digitized by Google

Supplementes eines Halb-Walzenabschnittes, wenn man den Durchmesser **GC** von dem halben Umkreise **GEC** abzieht, und mit der Länge **ED** multiplicirt.



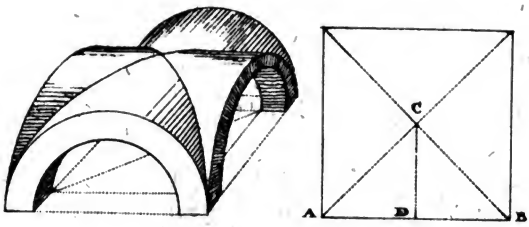
393. **Aufgabe.** Den Kubikinhalt eines geschlossenen Kreuzgewölbes zu finden.

Da dieses aus acht Viertels-Walzenabschnitten bestehet, deren gebogene Oberflächen noch so groß sind, als ihre Grundflächen; so suche man den Inhalt der Grundfläche, multiplicire ihn mit 2, und mit der Dicke des Gewölbes: so hat man den Kubikinhalt eines geschlossenen Kloster- oder Kreuzgewölbes.

394. **Anmerkung.** Weil der Durchmesser von dem Mittel der Dicke des Gewölbes zur Ausrechnung der gebogenen Oberfläche genommen werden muß, wie wir bereits bey dem Tonnengewölbe gesehen haben; so versteht es sich, daß sich die Grundfläche bey der Berechnung nach dem nämlichen Durchmesser richten müsse, welches auch bey den folgenden Gewölbern der Fall ist.

395. **Aufgabe.** Den Kubikinhalt eines offenen Kreuzgewölbes zu finden.

Digitized by Google



Da dieſes, wenn die Grundfläche, wie gewöhnlich, ein Quadrat iſt, aus vier Supplementen eines Halb-Walzenabſchnittes beſteht, ſo ſuche man die gebogene Oberfläche eines ſolchen Supplementes, nach Nro. 392; multiplicire ſie mit der Dicke des Gewölbes, und das Product mit 4: ſo gibt dieſes den kubiſchen Inhalt des Gewölbes.

Beyſpiel. Der Durchmeſſer **AB** halte 12′, und daher **CD**, weil das Ganze ein Quadrat iſt, 6′; die Dicke des Gewölbes ſey $1\frac{1}{2}$′ oder 15″ Decimalmaß: wie groß wird der kubiſche Inhalt ſeyn?

Man ſuche den halben Umkreis, ziehe den Durchmeſſer davon ab, und multiplicire den Reſt mit der Länge **CD**; ſo hat man die gebogene Oberfläche eines Viertheils. Dieſe, mit der Dicke des Gewölbes, und mit 4 multiplicirt, gibt den kubiſchen Inhalt des ganzen Gewölbes.

Digitized by Google

157 die Hälfte von 314.
12 Durchmesser.

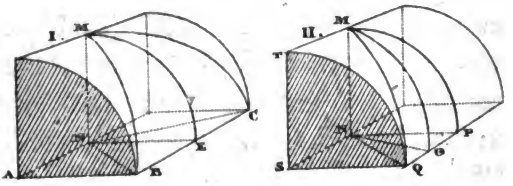
314
157

18,84 halber Umkreis.
12

-6,84 Rest des Umkreises.
6 Länge des Suppl. **CD**.

41',04''' gebogene Oberfläche.
60 anstatt der Multipl. mit 15 u. 4.

246''240'''' Kubikinhalt.



396. **Erklärung.** Wenn man eine senkrechte Viertelswalze Fig. **I.** nach der Linie **CN** und **NB** senkrecht mit dem Halbmesser **MN** schneidet, so nennt man das Stück **BNMC** einen Viertels-Walzenausschnitt.

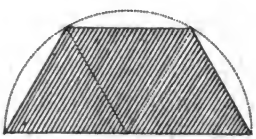
397. **Zusatz.** Weil ein Viertels-Walzenausschnitt durch einen senkrechten Schnitt **MNE** in zwey Viertels-Walzenabschnitte getheilt werden kann; so findet man seine gebogene Oberfläche eben so, wie die eines Viertels-Walzenabschnittes, wenn man den Halbmesser **AB** mit

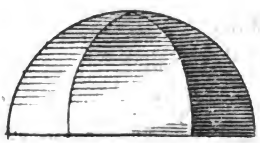
Digitized by Google

seiner Länge **BC** multiplicirt; daher sie noch so groß, als seine Grundfläche ist.

398. Zusatz. Fig. II. Auch die kleinern Ausschnitte **MNOP** sind von der vorhergehenden Art, ihre gebogenen Oberflächen zu finden, nicht ausgenommen, weil man sie als Theile derselben betrachten kann; daher ihre gebogenen Oberflächen ebenfalls noch so groß sind, als ihre Grundflächen: das ist $= SQ \times OP$.

399. Zusatz. Die gebogenen Oberflächen der Complemente von Viertels-Walzenausschnitten werden, wenn die Ausschnitte bis an die Punkte **B** und **C** gehen, nach Fig. I. Nro. 390. gefunden; gehen sie aber nicht so weit, wie **MNOP** Fig. II., so bestehen sie aus einem Complemente **MQST**, und aus einem Viertels-Walzenausschnitte **MNOQ**, und werden auch so berechnet.



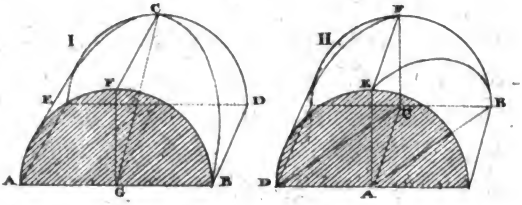


400. Aufgabe. Den kubischen Inhalt eines Sterngewölbes über ein regelmäßiges Vieleck zu finden.

Weil die Theile Viertels-Walzenausschnitte sind; so suche man den Flächeninhalt der Grund-

Digitized by Google

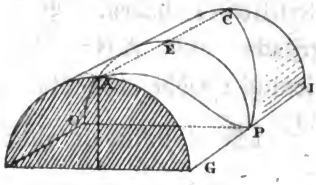
fläche; nehme denſelben doppelt, und multiplicire ihn mit der Dicke des Gewölbes.



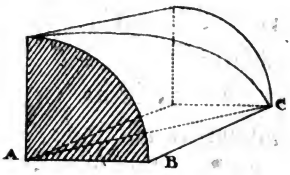
401. Erklärung. Wenn man Fig. I. eine halbe Walze aus dem Punkte C nach ſeinem Durchmeſſer AB ſchneidet; ſo nennt man das abgeſchnittene Stück einen Halb-Walzenabſchnitt, deſſen gebogene Oberfläche eben ſo groß iſt, als die Grundfläche ABDE; weil er durch einen Schnitt CFG in zwey Viertels-Walzenabſchnitte zerlegt werden kann, deren gebogene Oberflächen zuſammen ſo groß ſind, als die Grundfläche ABDE. Wenn von einer ſenkrechten halben Walze, Fig. II., zwey Viertels-Walzenabſchnitte nach verſchiedenen Halbmeſſern AE und CF gemacht werden; ſo bleibt ein Theil BEDF übrig, welcher durch einen Schnitt AEFC in zwey Complemente der beyden Abſchnitte getheilt, und als ſolche berechnet werden kann.

402. Erklärung. Schneidet man eine ſenkrechte halbe Walze von A und C nach ſeinem Durchmeſſer OP; ſo erhält man einen Halb-Walzenausſchnitt APCO, deſſen gebogene Oberfläche

Digitized by Google



aus **AC**, multiplicirt mit **OP**, besteht; weil das Ganze durch einen Schnitt **OEP** in zwey Halb-Walzenabschnitte getheilt werden kann. Die Theile **AGP** und **PCI** geben Complemente von Viertel-Walzenausschnitten, und werden auch als solche berechnet.



403. Lehrsatz. Der kubische Inhalt eines Viertel-Walzenabschnittes ist gleich dem Producte, welches entsteht, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Länge des Abschnittes multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt.

Der Viertel-Walzenabschnitt kann als ein Körper betrachtet werden, welcher aus lauter unendlich kleinen Pyramiden besteht, die ihre Grundflächen auf der gebogenen Oberfläche des

Digitized by Google

Abschnittes, und ihre Höhe in A als dem Mittelpunkte des Viertelkreises haben. Weil nun die gebogene Oberfläche aus $AB^2 \times BC$ besteht, und die pyramidalische Höhe ebenfalls AB ist; so gibt $\frac{AB^2 \times BC}{3}$ den Kubikinhalt eines Viertel-Walzenabschnittes.

404. Zusatz. Weil ein Viertel-Walzenausschnitt aus zwey Viertel-Walzenabschnitten besteht; so gibt $\frac{AB^2 \times BC}{3}$ (sieh die obige Figur I. Nr. 396.) den Kubikinhalt eines Viertel-Walzenausschnittes.

405. Zusatz. Der kubische Inhalt eines Halb-Walzenabschnittes, und der eines Halb-Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man das Quadrat ihrer Halbmesser mit ihrer Länge multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt; weil der erste aus zwey Viertel-Walzenabschnitten und der zweyte aus vier Viertel-Walzenabschnitten besteht. Es ist also nach den obigen Figuren der Inhalt des Halb-Walzenabschnittes gleich $\frac{AB^2 \times CF}{3}$, und der Inhalt des Halb-Walzenausschnittes gleich $\frac{OP^2 \times AC}{3}$ Fig. Nro. 401, und 402.

406. Zusatz. Der kubische Inhalt des Complements eines Viertel-Walzenabschnittes, und

Digitized by Google

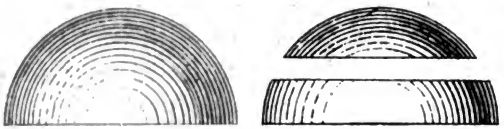
eines Viertel-Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man den Inhalt des Abschnittes oder Ausschnittes von dem Inhalt der Viertelswalze abzieht. Das Complement eines Halb-Walzenabschnittes, oder Halb-Walzenausschnittes findet man, wenn man den Abschnitt, oder Ausschnitt von der halben Walze abzieht.

407. Zusatz. Das Supplement eines Halb-Walzenabschnittes wird erhalten, wenn man die beyden Viertel-Walzenabschnitte von der halben Walze abzieht. Fig. Nro. 391.

408. Zusatz. Weil die Gewölber hohle Körper sind, so kann man ihren kubischen Inhalt auch erhalten, wenn man ihre Theile nach dem größern und kleinern Durchmesser als ganze Körper berechnet, und den Inhalt des kleinern von dem Inhalte des größern abzieht, wodurch der kubische Inhalt des Gewölbes übrig bleibt.

409. Anmerkung. Um sich einen deutlichen Begriff von den Walzenschnitten zu machen, wird es gut seyn, wenn man eine Walze drehen läßt, und dieselbe nach den angezeigten Linien durchschneidet. Ihre Anwendung dient nicht nur zur Ausrechnung der verschiedenen Arten von Gewölbern, sondern auch, um die Oberflächen von allerley Formen von Dächern zu finden, wenn sie aus vollen Kreisstücken bestehen, damit man das zur Bedeckung derselben nöthige Material daraus ermessen könne.

Digitized by Google



410. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt eines Kugelgewölbes, eines runden Schildgewölbes und eines offenen Kugelgewölbes zu finden.

Da man nach Seite 195, Nro. 327. im Stande ist, die Oberfläche einer halben Kugel eines Kugelabschnittes und eines Kugelbandes zu erhalten, so darf dieß, um den kubischen Inhalt des Gewölbes zu bekommen, nur mit der Dicke desselben multiplicirt werden.

411. **Anmerkung.** Von dem kubischen Inhalte der elliptischen Gewölber, und anderer, die weder aus einer Ellipse, noch aus einem Kreisbogen bestehen, werden wir in dem Anhange handeln.

Von der Verwandlung der Körper.

412. **Erklärung.** Einen Körper in einen andern verwandeln, heißt, demselben eine andere Gestalt zu geben, ohne seinen kubischen Inhalt zu verändern.

Digitized by Google

413. Aufgabe. Prismen, Parallelepipeden und Walzen in einander zu verwandeln.

Man verwandle ihre Grundflächen in andere von dem nämlichen Flächeninhalte, und gebe ihnen gleiche Höhen; so bleibt der kubische Inhalt. Denn, weil sich eine Kreisfläche, und ein Vieleck in ein Dreyeck, das Dreyeck aber in ein Parallelogramm von einerley Inhalt verwandeln läßt; so können auch die daraus entstehenden Prismen in einander verwandelt werden, wenn man ihnen einerley Höhe gibt.

414. Aufgabe. Pyramiden und Kegel in Prismen und Walzen zu verwandeln.

Man mache auf ihre Grundflächen ein Prisma oder eine Walze, und gebe denselben den dritten Theil von der Höhe der Pyramide oder des Kegels zu ihrer Höhe.

415. Zusatz. Will man umgekehrt Prismen und Walzen in Pyramiden und Kegel verwandeln, so müssen diese bey einerley Grundfläche dreymal so hoch, als jene gemacht werden.

416. Aufgabe. Eine Kugel in eine Walze zu verwandeln.

Man verfertigt aus dem Umkreise ihrer größten Kreisfläche eine Walze, und gibt ihr zwey Drittheile ihres Durchmessers zu ihrer Höhe.

417. Zusatz. Weil sich die Walze in ein Prisma, Parallelepipedum, Pyramide und Ke-

Digitized by Google

gel verwandeln läßt, so kann das Nämliche auch mit der Kugel geschehen.

418. Aufgabe. Verschiedene Körper in andere von gegebener Grundfläche oder Höhe zu verwandeln.

Man rechne ihren kubischen Inhalt aus, und dividire ihn durch die gegebene Grundfläche oder Höhe; so wird nach Nro. 345. das Unbekannte zum Vorschein kommen. Betrachtet man z. B. den Kubikinhalt einer Kugel, als den eines Kegels, und nimmt eine gewisse Grundfläche dazu an; so erhält man, wenn diese in den Kubikinhalt dividirt, und mit 3 multiplicirt wird, die Höhe des Kegels.

Beyspiel. Es soll eine Kiste verfertiget werden, welche 20 Schäffel Getreide fassen kann; die Höhe soll 4′, und die Breite 3′ halten, wie groß wird die Länge seyn müssen?

Man suche zuvor den Kubikinhalt von einem Schäffel, multiplicire ihn mit 20, und dividire das Product durch die Fläche, welche aus der Multiplication der Höhe und Breite $4 \times 3 = 12$ entsteht.

Das bayer. Schäffel hält bekanntlich $208\frac{1}{2}$ bayerische Maß, und die Maß $74\frac{304}{1000}$ bayerische zwölftheilige Kubikzolle, woraus $15492\frac{348}{1000}$‴ oder 8″ 1668‴ hervor geht, für welche man

im gegenwärtigen Falle 9″ annehmen kann. Werden diese mit 20 multiplicirt, und durch die obige Fläche von 12□′ dividirt, so entsteht die Länge der Kiste, welche 15′ beträgt.

Von der Ausziehung der Kubikwurzel.

419. Erklärung. Die Kubikwurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt, jene Zahl finden, welche, zweymal durch sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl hervor bringt. Die Kubikwurzel von 8 ist 2; weil $2\times2\times2=8$ ist. Eben so ist 3 die Kubikwurzel von 27; denn $3\times3\times3=27$. Die Kubuse der einfachen Zahlen bis 10 sind folgende:

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729. 1000.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Man sieht hieraus, daß eine Kubikzahl, welche nur aus drey Ziffern besteht, nicht mehr, als Eine Ziffer zu ihrer Wurzel haben kann; weil 10, als die erste Zahl von zwey Ziffern, schon 1000 zu ihrem Kubus hat. Eben so kann eine Zahl von 6 Ziffern nicht mehr, als 2 Ziffern zu ihrer Kubikwurzel haben; weil der Kubus von 100 schon sieben Ziffern, nämlich 1000000 enthält. Eine jede Zahl kann also nur dreymal so viele Ziffern zu ihrem Kubus erhalten, als sie selbst hat.

Digitized by Google

420. Wenn man was immer für eine Zahl, z. B. 5, in 2 Theile zertheilt, in 2 und 3, so enthält der Kubus dieser Zahl erstens den Kubus des ersten Theils; zweytens den Kubus des zweyten Theils; drittens das dreyfache Quadrat des ersten Theils durch den zweyten multiplicirt; viertens das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles durch den ersten multiplicirt. Der Kubus von 5, das ist 125, enthält also erstens 8, den Kubus des ersten Theils 2; zweytens 27, als den Kubus des zweyten Theils 3; drittens 36, als das dreyfache Quadrat des ersten Theils, multiplicirt mit dem zweyten; viertens 54, als das dreyfache Quadrat des zweyten Theils, multiplicirt mit dem ersten. Es ist also $8 + 27 + 36 + 54 = 125$. Hierin liegt der Grund des Verfahrens bey der Ausziehung der Kubikwurzel.

421. Aufgabe. Die Kubikwurzel aus der Zahl 77308776 auszuziehen.

77,308,776	426
64	
13 308	
48	
96	
48	
8	
10088	

Digitized by Google

-32	20776
5	292
31	752
	4536
	216
32	20776
	0

Man theile die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu drey Ziffern, wo aber die erste Klasse manchmal zwey, oder auch nur eine erhält. Hierauf ziehe man zur Linken von 77 der ersten Klasse den größten Kubus, der in dieser Aufgabe 64 ist, ab; dessen Wurzel 4 aber schreibe man hinter einen gezogenen Vertikalstrich. Zu dem Reste setze die nächste Klasse herunter; nehme das dreyfache Quadrat, das ist, multiplicire 4 durch sich selbst, und das Product 16 durch 3, welches 48 gibt; setze dieses als einen Divisor unter die Zahl 13308, und dividire sie: so erhält man den Quotienten 2; weil 3 zu groß seyn, und sich am Ende die Summe der Producte von der obigen Zahl nicht würde abziehen lassen. Den neu gefundenen Quotienten 2 multiplicire man mit dem Divisor 48 und setze das Product so unter die Zahl 13304, daß die letzten zwey Ziffern 08 frey bleiben. Man nehme ferner das dreyfache Quadrat von 2, das ist $2 \times 2 \times 3 = 12$; multiplicire 12 mit dem gleich anfangs gefundenen Quotienten 4, wo-

Digitized by Google

durch 48 entsteht; schreibe dieses so, daß die obere letzte Zahl 8 übrig bleibt; erhebe endlich 2 zum Kubus; welches 8 gibt; setze es so, daß es unter die letzte Zahl 8 zu stehen kommt, und addire die drey Producte zusammen; so erhält man 10088, welches von 13308 abgezogen wird. Zu dem Reste 3220 setze die dritte Klasse oder Abtheilung 776, und verfahre wie mit der zweyten. Man suche nämlich das dreyfache Quadrat von der bisher gefundenen Wurzel 42, welches $42 \times 42 \times 3 = 5292$ gibt; setze es wieder als Divisor unter die Zahl 3220776, doch so, daß die, letztern zwey Zahlen wie oben frey bleiben, und dividire diese Zahl, wodurch man 6 zum Quotienten erhält. Multiplicire sodann den Divisor durch den neuen Quotienten 6, und setze die Zahl 31752 so darunter, daß die obern letzten zwey Ziffern 76 frey bleiben. Suche ferner das dreyfache Quadrat von 6, nämlich $6 \times 6 \times 3 = 108$; multiplicire diese Zahl durch den zuvor gefundenen Quotienten 42, wodurch 4536 entsteht, und schreibe sie so darunter, daß die letzte Zahl frey bleibt. Erhebe endlich den neu gefundenen Divisor 6 zum Kubus, welcher 216 gibt, schreibe ihn unter die letzten drey Ziffern und addire die drey Producte; so erhält man 3220776, welches, von dem obigen abgezogen, keinen Rest gibt, daher die gegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl ist.

Digitized by Google

Die Ursache dieses Verfahrens gründet sich auf das, was Nro. 420. ist gesagt worden. Es ist nämlich in der ersten Klasse der Kubus des ersten Theils der Wurzel enthalten, die man folglich durch die Ausziehung dieser Wurzel erhält. In dem Reste, und der ersten Ziffer der herabgesetzten Reihe befindet sich das dreyfache Quadrat des ersten Theils, multiplicirt durch den zweyten. Um also den zweyten Theil zu erhalten, muß der Rest sammt der ersten Ziffer der zweyten Reihe durch das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel dividirt; die zwey letzten Ziffern aber für die zwey andern Producte, die noch in dieser Klasse enthalten sind, übrig gelassen werden. Wird endlich der Divisor, welcher aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils besteht, durch den zweyten Theil multiplicirt, und das dreyfache Quadrat des zweyten Theils der Wurzel ebenfalls durch den ersten multiplicirt, dann der Kubus des zweyten Theils dazu gesetzt; so müssen alle diese Producte nach ihrer Zusammenaddirung von der zweyten Klasse und dem Reste abgezogen werden; weil sie alle gemäß dem, was Nro. 420 gesagt wurde, in der zweyten Klasse enthalten sind.

422. Da diese Art, die Kubikwurzel auszuziehen, ziemlich beschwerlich ist; so wollen wir hier eine etwas kürzere und bequemere anführen, und dazu die oben gegebenen Zahlen beybehalten:

Digitized by Google

77,308,776	426
64	
13 308	
4 8	
74 088	
-3 22 0776	
52 92	
77 308 776	
0	

Man theile die Ziffern in Klaſſen, und ſuche die Wurzel der erſten Klaſſe, die man auch hinter den Verticalſtrich ſchreibt, und ſeinen Kubus von der erſten Klaſſe abzieht, wie oben geſchehen iſt. Hat man nach geſchehener Abziehung die zweyte Klaſſe herunter geſetzt, ſo nehme man das dreyfache Quadrat der erhaltenen Wurzel 4, nämlich $4 \times 4 \times 3 = 48$ zum Diviſor, und ſchreibe den Quotienten 2 zu 4; erhebe die bis dahin gefundene Wurzel zum Kubus, und ziehe ſie von der gegebenen Zahl 77308 ab. Zu dem Reſte ſetze die dritte Klaſſe; nehme zum Diviſor abermal das dreyfache Quadrat des Quotienten 42, und ſetze den erhaltenen Quotienten 6 zu 42; den ganzen bis dahin erhaltenen 426 aber erhebe wieder zum Kubus, und ziehe ihn von der oberſten gegebenen Zahl 77308776 ab, ſo bleibt kein Reſt.

Aus dieſem Verfahren ſieht man, daß nur von der erſten Klaſſe die Kubikwurzel geſucht, und der nächſt kleinſte Kubus davon abgezogen

Digitized by Google

werden muß. In der Folge wird allemal das dreyfache Quadrat zum Divisor gemacht, der erhaltene Quotient zum Kubus erhoben, und von der gegebenen obersten Zahl abgezogen.

423. Läßt sich die untere Zahl von der obern nicht abziehen; so ist dieß ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen wurde.

424. Bleibt nach vollendeter Rechnung ein Rest, so kann der Werth desselben durch Beysetzung von 3 Nullen in Decimalen so genau gefunden werden, als man es für nöthig hält.

425. Soll die Kubikwurzel aus einem Bruche ausgezogen werden; so muß dieses aus dem Zähler und Nenner, jedem insbesondere, geschehen.

426. Wir wollen hier noch ein Paar Beyspiele zur Uebung beysetzen.

Ein würfelförmiges Gefäß soll 12^{cc}, 824^{ccc} enthalten; wie groß wird eine Seite seyn?

$12{,}824^{ccc}$ | 8	$2'$, $2''$, $9'''$ Länge der Seite.
4824	
12	
10648	
2176000	
1452	
12008989	
— 815011	

Digitized by Google

Beyspiel. Eine hohle kupferne Kugel soll 6 Litres Weingeist fassen; wie groß wird der Durchmesser seyn?

Weil nach Seite 184, Nro. 301. der Litre einen Kubikdecametre ausmacht, welcher 1000 Kubikcentimetres, und dieser 1000 Millimetres enthält; so geben 6 Litres 6,000,000 Millimetres, als den Kubikinhalt der Kugel. Da nun nach Seite 233, Nro. 199. der Inhalt einer Kugel aus dem Kubus des Durchmessers, multiplicirt mit der Zahl 314, dividirt durch 600 besteht; so muß, um den Kubus des Durchmessers zu finden, nach Seite 209, Nr. 345. der obige Kubikinhalt mit 600 multiplicirt und durch 314 dividirt werden. Aus diesem Producte wird die Kubikwurzel ausgezogen, welche den Durchmesser der Kugel gibt.

Multiplicirt man also 6000,000 mit 600, so erhält man 3600,000,000, welches mit 314 dividirt, die Zahl $11464968\frac{48}{314}$ als den Kubus des Durchmessers gibt, woraus mit Hinweglassung des Bruches die Kubikwurzel auf folgende Art ausgezogen wird:

Digitized by Google

11464,968	2″, 2‴, 5⁗.
8′	
-3464	
12	
10648	
—816968	
1452	
11390625	
—-74343	

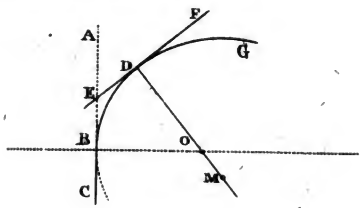
Das ist 2 Decimetres, 2 Centimetres, und 5 Millimetres, als Durchmesser der Kugel.

Digitized by Google

Anhang.

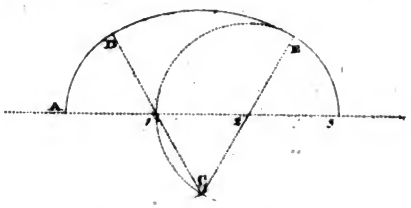
Von dem Aufzeichnen verschiedener gedruckter Bogen und anderer Linien, die in der Baukunst und den technischen Künsten vorkommen.

427. **Erklärung.** Ein Bogen, welcher mit einer halben Kreislinie beschrieben wird, heißt ein voller Bogen; derjenige, wo die halbe Weite größer ist, als die Höhe, wird ein gedruckter Bogen; wo aber die Höhe größer, als die halbe Weite ist, ein überhobener Bogen genannt. Ein steigender Bogen ist der, dessen eine Seite höher liegt, als die andere; und ein gothischer Bogen derjenige, der aus zwey sich durchschneidenden Kreisstücken besteht. Diese verschiedenen Bogen werden in der Baukunst zu allerley Arten von Gewölbern angewandt.



428. Die Mauern, worauf die Gewölber ruhen, nennt man die **Widerlagen.** Damit die

Last der Gewölber so viel möglich senkrecht auf die Widerlagen wirket; so müssen diese Tangenten von den Bogen machen, wie **ABC** von dem Bogen **BD**. Eben so sollen auch die gedruckten Bogen, welche aus mehreren Kreisstücken bestehen, bey ihrem Zusammenstoßungs-Punkte einerley Tangenten haben. So ist **EF** die gemeinschaftliche Tangente der beyden Bogen **DB** und **DG**; daher sich ihre Mittelpunkte **O** und **M** auf der nämlichen geraden Linie **DM** befinden, weil nach Nro. 130. die Halbmesser allemal senkrecht auf ihren Tangenten stehen. Durch dieses Verfahren wird verhindert, daß die Bogen weder unter sich, noch mit den Widerlagen einen Bruch machen, welches bey Gewölbern durchaus vermieden werden muß.

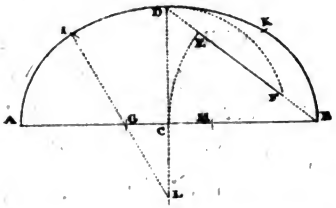


429. **Aufgabe.** Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wenn die Weite desselben gegeben ist.

Man theile die gegebene Weite in drey gleiche Theile, beschreibe aus 1 und 2 halbe Kreisbogen, und mit der nämlichen Zirkelöffnung die

Digitized by Google

Kreisbogen bey C; ziehe dann durch C 1 und C 2 die geraden Linien C 1 D, und C 2 E; so gibt C den Mittelpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser C D der Bogen D E gezogen, und mit D A und E 3 verbunden werden kann.

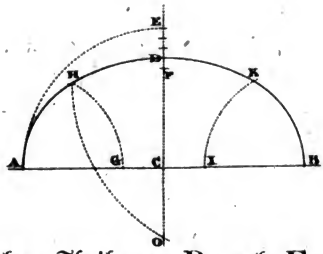


430. Aufgabe. Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wo außer der Weite auch die Höhe gegeben ist.

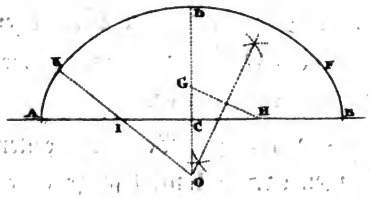
Es sey die Weite A B, und die Höhe C D gegeben; so ziehe man die Linie D B, setze den Zirkel in B, und beschreibe den Bogen C E; setze ihn dann in C, und beschreibe den Bogen D F; fasse die Linie E F in den Zirkel, und trage sie aus B in H, und aus A in G; setze den Zirkel in G und H; mache die Bogen A I, und B K, durchschneide die beyden Bogen mit der nämlichen Zirkelöffnung aus A in I, und aus B in K, und ziehe die gerade Linie I G L: wo diese die verlängerte Mittellinie D C schneidet, da ist der Mittelpunkt für den obern Bogen I D K. Oder:

Wenn die Weite A B, und die Höhe C D gegeben ist; so mache man aus C den Bogen A E, theile D E in 3 gleiche Theile, und trage

Digitized by Google



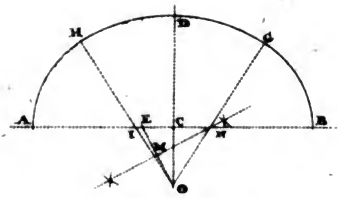
einen solchen Theil von **D** nach **F**; beschreibe mit **FC** aus **A** und **B** die Bogen **GH**, und **IK**; aus **G** und **I** aber die Bogen **AH** und **BK**; mache ferner mit **HK** aus **K** und **H** die Kreuzbogen bey **O**; so ist dieß der Mittelpunkt des Bogens **HDK**.



431. Aufgabe. Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wo nebst der Weite und Höhe noch die Mittelpunkte der beyden Seitenbogen gegeben sind.

Es sey die Weite **AB**, die Höhe **DC**, und die Mittelpunkte **I** und **H** gegeben; so beschreibe man die Bogen **AK** und **BF**, trage **AI** von **D** nach **G**, und ziehe **GH**; setze den Zirkel in **G** und **H**; errichte auf **GH** eine senkrechte, und verlängere sie bis **O**: so ist **O** der Mittelpunkt des Bogens **KDF**.

Digitized by Google

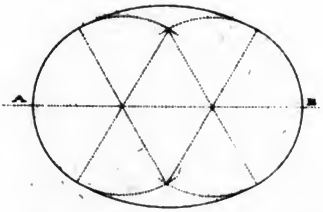


Ist der Mittelpunkt **O** des mittlern Kreisstückes, die Weite **AB** und die Höhe **CD** gegeben; so trägt man **OD** von **B** nach **E**, und zieht **OE**; auf der Mitte von **OE** bey **M** errichtet man eine senkrechte **MN**; wo diese **AB** bey **N** schneidet, dort ist der Mittelpunkt des Seitenbogens **BG**, welcher auch nach **I** getragen, und **OIH**, dann **GNO** gezogen wird, welche die Gränzen der drey Bogen geben.

432. **Anmerkung.** Bey der ersten dieser zweyl Auflösungen darf **AI** nicht so groß, als **CD**, und bey der letzten **EO** nicht so groß, als **AE** seyn. Ohne dieses Bedingniß könnten diese Aufgaben nicht aufgelöset werden. Ueberhaupt erscheinen die gedruckten Bogen nicht mehr angenehm, wenn die Höhe kleiner, als der vierte Theil der Weite ist; weil die Bogenstücke zu sehr in ihren Krümmungen verschieden sind.

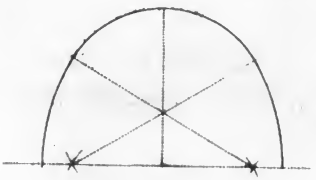
433. **Anmerkung.** Werden zwey gleiche gedruckte Bogen sowohl über, als unter einer Linie **AB** gezogen, so entsteht eine ellipsartige Figur, die man eine gedruckte Kreislinie nennt, und die in den Kunstfächern zu verschiedenen Ein-

Digitized by Google



fassungen und Verzierungen gebraucht wird; indem sie angenehmer, als die Ellipse ist.

434. Aufgabe. Einen überhobenen Bogen zu zeichnen, wovon die Höhe und Breite gegeben ist.

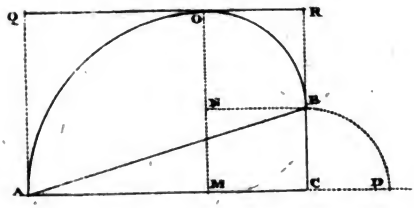


Man setze die halbe wagrechte Linie **AB** der vorigen Figur senkrecht, und zeichne zu beyden Seiten die Hälfte der gedruckten Bogen nach der gegebenen Weite und Höhe, wie oben gezeigt wurde, daran.

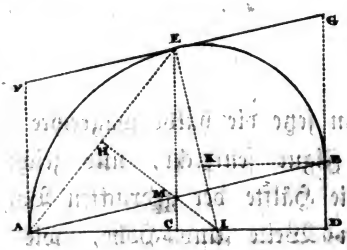
435. Aufgabe. Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, daß die Scheitellinie wagrecht auf den Widerlagen steht.

Die Linie **AB** wird die Steigungslinie, und **QR** die Scheitellinie genannt.

Digitized by Google



Man ziehe die horizontale **ACD**, trage **BC** in **D**; theile **AD** bey **M** in zwey gleiche Theile; errichte **MO** senkrecht, und **BN** aus **B** ebenfalls; so ist **N** der Mittelpunkt des kleinern, und **M** der Mittelpunkt des größern Bogens, über welche die Scheitellinie **QR** als ihre gemeinschaftliche Tangente gezogen werden kann. Die Widerlagen bey **A** und **B** müssen hier, wie bey allen Gewölbebögen ebenfalls Tangenten ihrer beyderseitigen Bogen seyn.

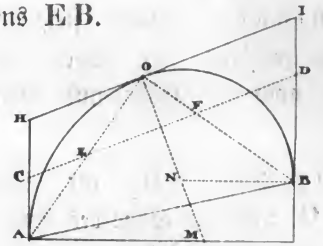


436. **Aufgabe.** Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, wo die Scheitellinie mit der Steigungslinie parallel läuft.

Es sey **AB** die Steigungslinie, so ziehe man **AD**, theile sie bey **C** in zwey gleiche Theile, und errichte **CE** senkrecht; wo diese **AB** bey **M**

Digitized by Google

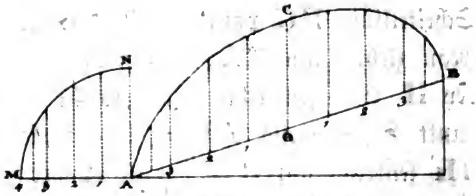
schneidet, nehme man **MA**, und trage sie nach **E**; so ist **E** der Scheitelpunkt, durch welchen die Scheitellinie **FG** parallel mit **AB** gezogen wird. Man ziehe dann **EA**, und errichte in ihrer Mitte bey **H** eine senkrechte **HI**; so ist **I** der Mittelpunkt des Bogens **AE**. Ziehe ferner **EI**, und **BK** senkrecht auf **BD**; so ist **K** der Mittelpunkt des Bogens **EB**.



437. **Aufgabe.** Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, wo die Scheitellinie weder parallel mit der Steigungs-Linie, noch wagrecht auf den Widerlagen steht.

Es sey **AB** die Steigungs-Linie, **CD** die Scheitellinie; so trage man **CA** in **E**, **BD** in **F**, und ziehe **EA** und **FB**; wo sich diese bey **O** schneiden, ist der eigentliche Scheitelpunkt, durch welchen die Scheitellinie **HI** parallel mit **CD** gezogen wird. Ziehe ferner auf **HI** bey **O** eine senkrechte **OM**, und auf **AC** bey **A** eine andere senkrechte **AM**; so ist **M** der Mittelpunkt des Bogens **AO**; und zieht man **BN** senkrecht auf **BD**, so ist **N** der Mittelpunkt des Bogens **OB**.

Digitized by Google

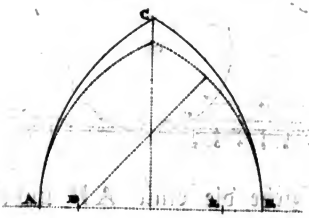


438. **Aufgabe.** Einen steigenden Gewölbebogen zu zeichnen, wo außer dem Scheitelpunkte auch noch die Höhe und Weite gegeben ist.

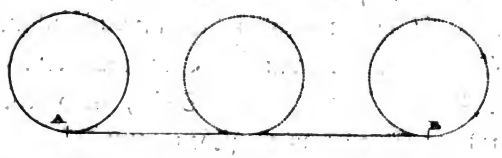
Es sey die Weite **AB**, der Scheitelpunkt senkrecht über **O**, und die Höhe des Bogens **OC**; so beschreibe man mit **OC** einen Quadranten **AMN**, theile **AM** in mehrere gleiche Theile, hier in 4; den letztern aber bey **M4** noch in zwey andere, und errichte lauter senkrechte, wie die Figur zeigt. Theile ferner **AO** und **OB**, jede in eben so viele gleiche Theile als **AM**, ziehe sie alle parallel mit **OC**, und gebe ihnen die nämliche Höhe, wie denen bey **AM** nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4; so können in die obern Endespunkte Stifte geschlagen, an diese eine biegsame Latte angelegt, und darnach der steigende Bogen gezogen werden.

439. **Aufgabe.** Einen gothischen Gewölbebogen zu zeichnen,

Da die Widerlagen Tangenten mit den Bogen machen sollen; so stehen die Mittelpunkte



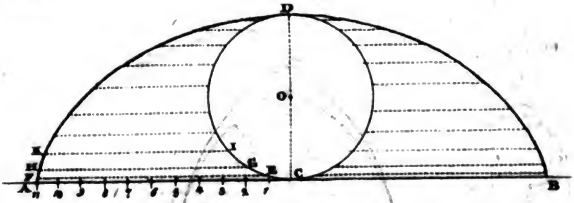
wieder senkrecht auf den Widerlagen, nämlich auf der Linie **AB**. Man setze daher den Zirkel in **A**, und mache den Bogen **BC**, setze ihn dann in **B**, und mache den Bogen **AC**; so gibt dieß einen gothischen Gewölbebogen. Man kann sich auch auf der Linie **AB** andere Punkte, z. B. **D** und **E**, wählen, und den Zirkel von **D** bis **B** öffnen, wo aber der Bogen niederer wird. Setzt man ihn außerhalb **A** und **B**; so wird derselbe höher, als der Bogen aus **A** und **B**.



440. **Erklärung.** Diejenige Linie, welche ein Punkt **A** eines Rades in seinem Fortlaufen nach **B**, wo er auf **AB** bis **B** seine ganze Kreislinie entwickelt hat, beschreibt, wird die Radlinie (Cykloide) genannt.

441. **Aufgabe.** Eine Radlinie zu zeichnen.

Digitized by Google

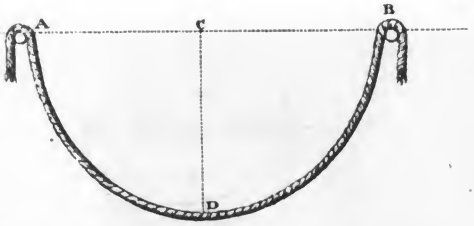


Man ziehe die Linie **AB** unbestimmt; mache die senkrechte **CD**; theile auf **CA** eilf Theile, und auf **CD** sieben; so hat man den Durchmesser, und die halbe Peripherie. Man trage ferner **CA** nach **B**, halbire **CD**, und mache mit **OC** einen Kreis; nehme **C1**, und trage es auf die halbe Peripherie eilfmal, ziehe dann die Parallellinien **EF**, **GH**, **IK**, und verlängere sie auf die entgegengesetzte Seite gegen **B**. Man nehme nun **C10**, und trage sie auf **EF**, **C9** auf **GH**, **C8** auf **IK**, und so fort, bis man nach **D** kommt. Trage dann die Längen **EF**, **GH**, **IK** ꝛc. auch auf die entgegengesetzte Seite bey **B**; so bekommt man die einzelnen Punkte der Radlinie, welche man entweder aus freyer Hand, oder durch eingeschlagene Stifte, und ein biegsames Lineal zusammen ziehen kann.

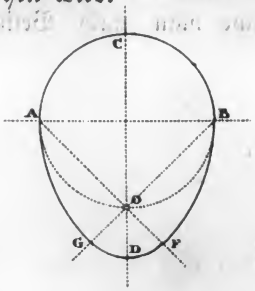
442. **Aufgabe.** Eine Kettenlinie zu zeichnen.

Man ziehe eine wagrechte **AB**, und eine senkrechte **CD**, bestimme auf dieser die Höhe, welche der Bogen haben soll, und auf **AB** die Weite desselben; nehme dann eine Kette oder Seil, befestige es in **A**, und ziehe bey **B** so lange an, bis

Digitized by Google



es den bestimmten Punkt bey D erreicht. Wird nun nach der Krümmung des Seiles eine Linie gezogen; so ist diese die Kettenlinie, welche unter allen krummen Linien als die dauerhafteste für die Gewölber angesehen wird.

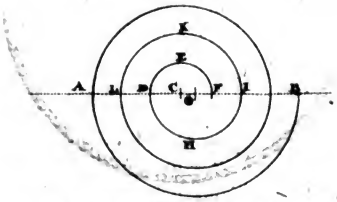


443. Aufgabe. Eine Eylinie (Oval) zu zeichnen.

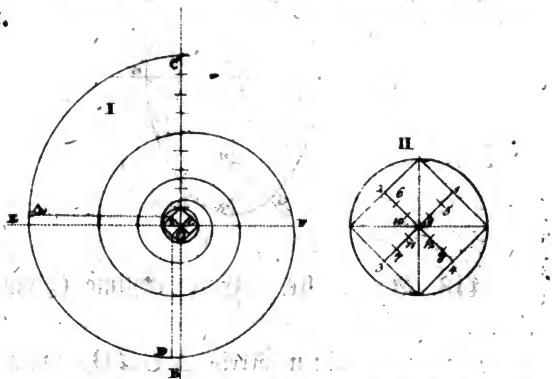
Man ziehe einen Kreis ACBO, mache die Durchmesser AB und CO rechtwinklig; ziehe durch O die Linie AF und BG, setze den Zirkel in A, öffne ihn bis B, und ziehe den Bogen BF; eben so auch aus B den Bogen AG; setze ihn dann in O, und ziehe GDF, so ist die Eylinie vollendet.

444. Aufgabe. Eine Spirallinie zu zeichnen.

Digitized by Google



Man mache eine Linie **AB**, setze den Zirkel in **C**, und ziehe den Bogen **DEF**; theile dann **CF** in zwey gleiche Theile; setze den Zirkel in **O** und mache den Bogen **DHI**; setze ihn dann wieder in **C**, und mache den Bogen **IKL**; so entsteht, wenn dieses Verfahren fortgesetzt wird, eine Spirallinie, welche man nach Belieben vergrößern kann.



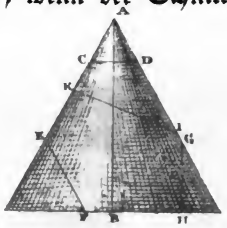
445. **Aufgabe.** Eine Schneckenlinie zu zeichnen.

I. Man setze **CB** senkrecht auf **EF**, mache auf dem Durchschneidungs-Punkte mit einer beliebigen Zirkelöffnung einen Kreis; trage den Halbmesser desselben neunmal von dem Mittelpunkte **O** bis **C**; zeichne dann ein Quadrat in

den Kreis, wie man bey II. im Großen sehen kann; theile die Linie von 1 bis in den Mittelpunkt in 3 gleiche Theile; eben so auch die Linien von 2, 3, 4, wie die Figur II. zeigt. Man setze dann Figur I. den Zirkel in 1, öffne ihn bis C, und mache den Bogen CA; setze ihn dann in 2, öffne ihn bis A, und mache den Bogen AD; und so fort nach der Reihe der Zahlen, bis die Figur geschlossen ist.

Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von Flächen durchschnitten werden.

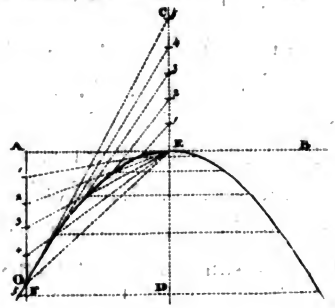
446. **Erklärung.** Wenn eine Kugel, wie immer, von einer Fläche durchschnitten wird, so gibt der Durchschnitt allemal einen Kreis, welcher am größten ist, wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt geht.



447. Wenn ein Kegel durch seine Achse AB geschnitten wird, so gibt der Schnitt ein Dreyeck. Schneidet man ihn parallel mit seiner Grundfläche, so macht der Durchschnitt CD

Digitized by Google

einen Kreis. Wird er parallel mit einer Seite, wie **EF**, geschnitten; so gibt der Schnitt auf der gebogenen Oberfläche eine Parabel. Geht der Schnitt parallel mit der Achse, wie **GH**, so hat man eine Hyperbe; und durch einen mit der Grundfläche schiefen Schnitt entsteht **IK** eine Ellipse. Durch das wirkliche Zerschneiden eines Kegels wird die Sache anschaulich. Die Parabel, die Hyperbel und die Ellipse werden, weil sie aus den Schnitten des Kegels entstehen, auch Kegelschnittslinien genannt.

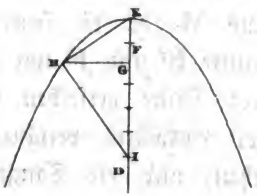


448. **Aufgabe.** Eine Parabel zu zeichnen, die durch einen bestimmten Punkt **O** geht.

Man setze zwey Linien **AB** und **CD** unter einem rechten Winkel zusammen, wovon **ED** die Achse genannt wird; bestimme den Punkt **O**, durch welchen die Parabel gehen soll, und ziehe durch selben die Linie **AF** parallel mit **CD**; mache mehrere gleiche Punkte auf **AF** und **CE**; ziehe die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 der Linie **CE** nach

Digitized by Google

O, und die der Linie AF nach E; so sind überall, wo sich die beyden gleich bezeichneten Linien durchschneiden, Punkte der Parabel, die man durch eingeschlagene Stifte und ein biegsames Lineal, oder aus freyer Hand zusammen ziehen kann, wodurch man eine Seite der Parabel erhält, die durch den Pynkt O gehen wird. Zieht man aus den erhaltenen Punkten senkrechte auf die Achse ED, und verlängert sie unbestimmt; so können die Punkte auch auf die entgegengesetzte Seite getragen, und dadurch die ganze Parabel erhalten werden.

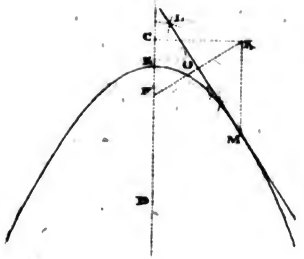


449. Aufgabe. Den Brennpunkt der Parabel zu finden.

Man ziehe auf einen beliebigen Punkt der Achse ED eine senkrechte GH; dann auf HE aus dem Punkte H eine andere senkrechte HI; so ist GI der Parameter. Wird dieser in vier gleiche Theile getheilt, und ein Theil von E nach F getragen; so gibt F den Brennpunkt (Focus) der Parabel.

450. Aufgabe. Durch einen auf der Parabel gegebenen Punkt M eine Tangente zu ziehen.

Digitized by Google

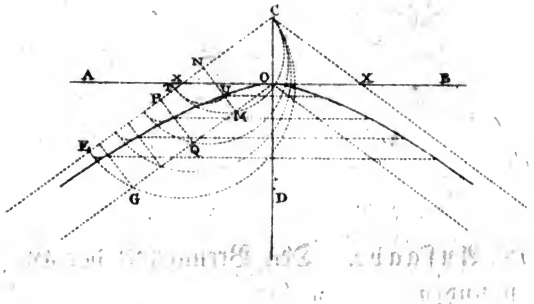


Man ſuche zuvor den Brennpunkt **F**; trage die Entfernung desſelben vom Scheitel **E**, nämlich **EF** von **E** nach **C**, und ziehe **CK** ſenkrecht auf **CD**; aus **M** aber die ſenkrechte **MK**; verbinde die Punkte **K** und **F** mit einer Linie, und errichte auf der Mitte derſelben **O** eine ſenkrechte **LO**, welche, rückwärts verlängert, durch den Punkt **M** gehen, und die Tangente der Parabel bilden wird.

451. Anmerkung. Die Parabel hat die Eigenſchaft, daß die Strahlen eines Lichtes, welches ſich in dem Brennpunkte befindet, alle parallel mit der Achſe zurück geworfen werden. Befindet ſich aber eine Flamme außerhalb der Parabel, ſo concentriren ſich die Strahlen alle in dem Brennpunkte **F**, woraus ſich die Wirkung der paraboliſchen Brennſpiegel erklären läßt. Die nämliche Beſchaffenheit hat es mit dem Schalle, oder der Stimme des Menſchen. Geworfene, oder aus Feuerröhren unter einem Winkel abgeſchoſſene Körper, wie Bomben, und an-

Digitized by Google

dere Kugeln beschreiben in ihrem Laufe eine Parabel. Das aus Gerinnen abschießende Wasser macht in seinem Falle die nämliche Figur.

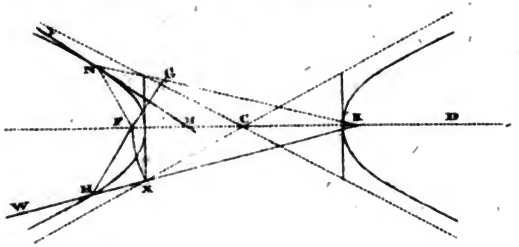


452. **Aufgabe.** Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.

Man setze ein Paar Linien **AB** und **CD** rechtwinklig zusammen; ziehe **CE** unter einem beliebigen Winkel, und mit dieser **OG** parallel; so geben **CO** und **OX** die beyden halben Achsen der Hyperbel. Man mache dann mit einer willkührlichen Zirkelöffnung verschiedene Bogen, die alle in **C** anfangen; wo diese die Linie **OG** durchschneiden, fälle man Perpendikel **MN**, **PQ** ꝛc. auf die Linie **CE**; setze den Zirkel in **N**, öffne ihn bis **T**, und beschreibe einen Bogen, welcher **NM** in **U** schneidet, und bey **U** einen Punkt der Hyperbel gibt. Wird nun mit allen übrigen Perpendikeln auf die nämliche Art verfahren, und die dadurch erhaltenen Punkte auf die entgegengesetzte Seite, wie bey der Parabel,

Digitized by Google

getragen; so erhält man durch das Zusammenziehen derselben die verlangte Hyperbel.



453. Aufgabe. Den Brennpunkt der Hyperbel zu finden.

Man setze den Zirkel in C, öffne ihn bis X und beschreibe den Bogen XF; so ist F der Brennpunkt der Hyperbel. Trägt man aus C den Punkt F nach K, so hat man den Brennpunkt einer Hyperbel, welche entstünde, wenn man den Schnitt parallel mit der Achse CD rückwärts gegen K richten, und einen ähnlichen Kegel, der mit der Spitze bey C an den ersten stoßen würde, durchschnitten hätte.

454. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt N der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

Man ziehe auf die beyden Brennpunkte F und K die Linien NF und NK; setze den Zirkel in N, öffne ihn bis F, und trage NF in G, ziehe dann auf die Mitte von GF eine senkrechte HI: so ist diese die verlangte Tangente, die durch den gegebenen Punkt N gehen wird.

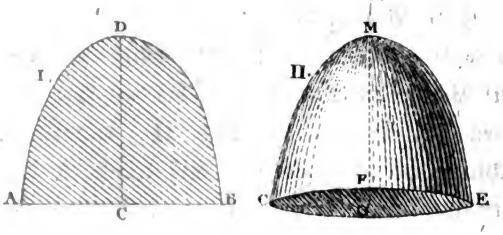
Digitized by Google

455. Anmerkung. Die Strahlen, welche von einem Lichte, oder von einer Stimme aus dem Brennpunkte der Hyperbel an ihre Schenkel stoßen, z. B. von **F** nach **H**, werden in der Richtung zurück geworfen, als wenn sie aus dem Brennpunkte **K** der entgegengesetzten Hyperbel kämen: ihre Richtung ist daher **H W**, woraus man sieht, daß die hyperbolische Figur zur Verbreitung des Lichtes, und des Schalles sehr geschickt ist; deßwegen man sie auch zu Lampen gebraucht. Man kann sich derselben noch zu Rückwänden von Kaminen in den Zimmern bedienen; weil dadurch die Wärme des Feuers, welches sich in dem Brennpunkte befinden muß, sehr weit aus einander geworfen, und daher das Zimmer wohl erwärmt wird.

Dreht man eine Parabel um ihre Achse, oder eine Hyperbel um ihre verlängerte Achse **C D**; so beschreibt die erste einen Körper, den man eine Paraboloide, und die zweyte einen andern, den man eine Hyperboloide nennt. Da die letzte sehr selten vorkommt, so wollen wir hier bloß die erste, nämlich die Paraboloide betrachten, zuvor aber noch die Parabelfläche berechnen.

456. Aufgabe. Den Quadratinhalt einer Parabelfläche **A D B C** zu berechnen. Fig. I.

Digitized by Google

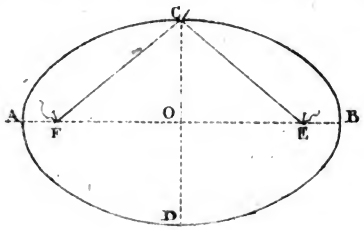


Man nimmt zwey Drittheile von dem Producte, welches entsteht, wenn man **AB** mit **CD** multiplicirt. Es ist also die Parabelfläche gleich

$$\frac{AB \times CD \times 2}{3}$$

457. Aufgabe. Den Kubikinhalt einer Paraboloide zu finden. Fig. II.

Er besteht aus der Multiplication der Grundfläche **CDEF** mit der Höhe **OM**, dividirt durch 2.

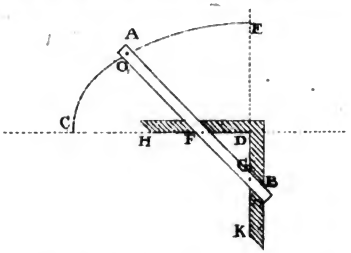


458. Aufgabe. Eine Ellipse zu beschreiben, wovon die beyden Achsen oder die Länge und Breite gegeben ist.

Man setze **AB** und **CD** rechtwinklig zusammen, fasse die halbe größere Achse in den Zirkel, und trage sie von **O** in **A** und **B**; die halbe

Digitized by Google

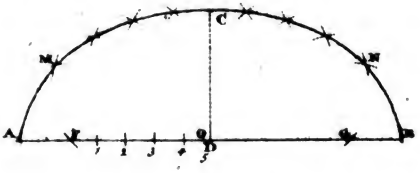
kleinere aber von O nach C und D; setze den Zirkel in C, und mache mit der Oeffnung von O A die Durchschnitte bey E und F: so sind diese beyden die Brennpunkte, in die man zwey Stifte einschlägt, und eine Schnur von der Länge E C F daran bindet. Man nimmt dann einen farbigen Stift; legt ihn an die Schnur, indem man dieselbe damit ausdehnt, und zeichnet durch Herumführung des Stiftes die Ellipse.



Läßt man sich eine Latte A B verfertigen, in die man bey O einen farbigen Stift befestigen kann; trägt die beyden halben Achsen C D und D E von O nach F und G, und befestigt dort zwey kleine eiserne Stifte: so kann auch damit eine Ellipse gezeichnet werden, wenn man an H D K ein Winkelmaß festhält, und die Latte mit den beyden Stiften an demselben so herum führt, wie die Figur zeigt. Durch dieses Verfahren wird die elliptische Linie etwas reiner, als in dem vorhergehenden; es muß aber viermal wiederhohlt werden, weil man nur allemal ein Viertheil erhält.

Digitized by Google

Da diese beyden Arten nur zur Ausübung im Großen dienen, so wollen wir noch eine für die Zeichnung auf das Papier anführen.

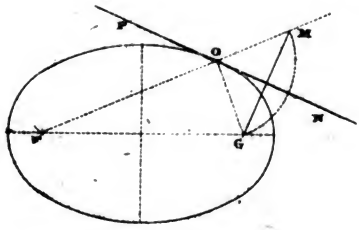


Es sey die größere Achse **AB**, die halbe kleinere **CD** gegeben; so trage man **AO** aus **C** in **F** und **G**, welches die beyden Brennpunkte gibt. Man theile dann **FO** in beliebige gleiche Theile 1, 2, 3, 4, 5, und nehme **B1** in den Zirkel; setze ihn in den Punkt **G**, und mache damit den kleinen Bogen bey **M**, und aus **F** mit der nämlichen Zirkelöffnung, den Bogen bey **N**. Nehme dann **1A**, setze den Zirkel in **F** und **G**, und durchschneide die Bogen bey **M** und **N**; so hat man überall einen Punkt der Ellipse. Nimmt man ferner **B2**, und verfährt in Allem, wie bey **B1**; so kann man so viele Punkte erhalten, als man will, die man aus freyer Hand zusammen ziehen, und eine Ellipse daraus bilden kann.

459. **Aufgabe.** Durch einen auf der Ellipse gegebenen Punkt **O** eine Tangente zu ziehen.

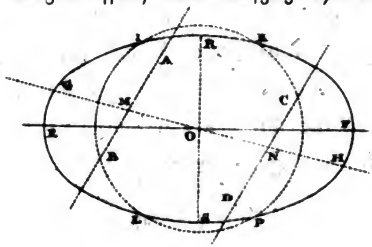
Man verbinde den Punkt **O** mit den beyden Brennpunkten **F** und **G**; trage **OG** nach **M**

Digitized by Google



auf die verlängerte **FO**; ziehe **MG**, und setze auf ihre Mitte die senkrechte **NP**: so ist diese die verlangte Tangente.

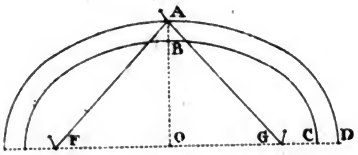
460. **Aufgabe.** Eine Ellipse, in der weder der Mittelpunkt noch eine Achse gegeben ist, auszumessen, und aufzuzeichnen.



Man ziehe ein Paar beliebige Linien **AB** und **CD** parallel; theile beyde bey **M** und **N** in zwey gleiche Theile, und ziehe die Linie **GH**, welche, ebenfalls in zwey gleiche Theile getheilt, den Mittelpunkt **O** der Ellipse gibt. Man beschreibe ferner aus **O** einen Kreis, welcher die Ellipse in **K** und **P**, in **I** und **L** schneidet; theile die Weite **IK** und **LP** in **R** und **S** in zwey gleiche Theile, und ziehe durch diese beyden Punkte die Linie **RS**: so hat man die kleinere Achse, auf welche bey **O** die größere **EF** senkrecht gesetzt werden kann.

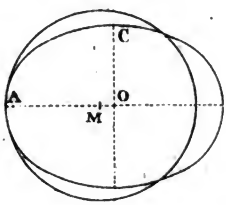
Digitized by Google

Mißt man nun die beyden Achsen, so ist man im Stande, die Ellipse nach einer der obigen Aufgaben zu zeichnen und zu Papier zu bringen.



461. **Aufgabe.** Mit einer gegebenen Ellipse eine andere parallel zu ziehen.

Es sey die Entfernung der parallelen Ellipse **AB**, so trage man diese Länge nach **CD**, und **OD** aus **A** nach **F** und **G**, welches die beyden Brennpunkte für die parallele Ellipse gibt, aus denen sie kann gezogen werden.



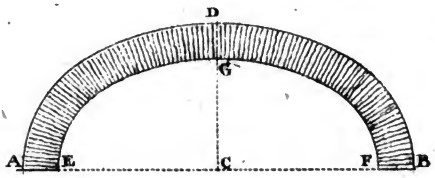
462. **Aufgabe.** Eine Ellipse in einen Kreis zu verwandeln.

Man setze die halbe kleinere Achse **CO** an die halbe größere **AO**; theile bey **M** die ganze Länge in zwey gleiche Theile; so gibt **AM** den Halbmesser eines Kreises, welcher der Ellipse dem Flächeninhalte nach gleich seyn wird.

Digitized by Google

463. Aufgabe. Den Quadratinhalt einer elliptischen Fläche zu finden.

Man verwandle die elliptische Fläche in eine Kreisfläche, und berechne sie als eine solche; oder multiplicire die Kreislinie, welche mit der großen Achse gemacht werden kann, mit dem vierten Theile der kleinen Achse. Läßt sich diese nicht bequem in vier gleiche Theile zertheilen, so kann mit der ganzen Achse multiplicirt, und das Product durch 4 dividirt werden.



464. Aufgabe. Den Kubikinhalt eines elliptischen Tonnen-Gewölbes zu finden.

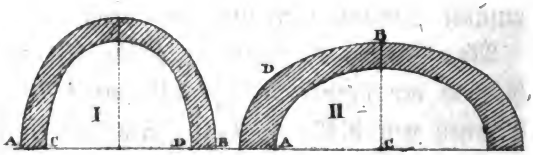
Man berechne die halbe elliptische Fläche sowohl nach den beyden Achsen **AB** und **CD**, als nach denen von **EF** und **GC**, ziehe die kleinere halbe von der größern halben ab; so bleibt der Rest für den Bogen **ADBFGE**; der, mit der Länge des Gewölbes multiplicirt, den kubischen Inhalt desselben gibt. Das nämliche Verfahren kann auch außer dem Nro. 385. angezeigten bey einem kreisförmigen Tonnengewölbe angewandt werden.

Digitized by Google

465. Erklärung. Wenn sich eine halbe Ellipse um eine ihrer beyden Achsen dreht, so beschreibt sie einen Körper, den man eine Ellipsoide nennt.

466. Aufgabe. Den kubischen Inhalt einer Ellipsoide zu berechnen, welche entsteht, wenn sich die halbe Ellipse um ihre große Achse wendet.

Man multiplicire die Kreislinie, welche die große Achse zum Durchmesser hat, mit dem Quadrate der kleinern Achse, und dividire das Product durch 6. Dreht sich die halbe Ellipse um ihre kleine Achse, so wird das Quadrat der großen Achse mit der Kreislinie, welche die kleine Achse zum Durchmesser hat, multiplicirt, und das Product mit 6 dividirt. Bey der halben Ellipsoide kann das Product mit 12 dividirt werden.



467. Aufgabe. Den kubischen Inhalt eines elliptischen Kuppelgewölbes zu finden. Fig. I.

Man betrachte die Kuppel als zwey volle halbe Ellipsoiden nach den beyden Achsen **A B** und

CD; suche von beyden den kubischen Inhalt, und ziehe den kleinen von dem größern ab, so bleibt der Rest für den Inhalt der Kuppel.

Dreht sich der elliptische Bogen Fig. II. ADB um die kleinere halbe Achse CB, so entsteht ein gedrucktes elliptisches Kuppelgewölb, das eine Kreisfläche zur Grundfläche hat, und als eine halbe Ellipsoide der zweyten, oben beschriebenen Art betrachtet werden kann, wovon der kubische Inhalt wieder, wie im vorhergehenden Falle, gefunden wird.

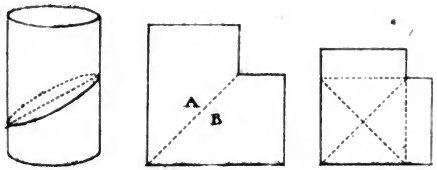
Aus dem, was von den elliptischen Gewölbern gesagt wurde, läßt sich auf die paraboliſchen schließen. Hyperbolische von einer beträchtlichen Größe kommen fast nie vor.

468. Anmerkung. Weil die gedruckten Bogen aus Kreisstücken nicht sehr von der Ellipse unterschieden sind; so kann man dergleichen Gewölber als elliptische berechnen, indem dadurch kein großer Unterschied in Hinsicht des Materials hervor geht.

469. Anmerkung. Die Strahlen eines Lichtes, das in einem Brennpunkte der Ellipse steht, werden alle in den andern Brennpunkt zurück geworfen. Eben so werden sich auch zwey Menschen, die sich in den beyden Brennpunkten eines elliptischen Zimmers befinden, deutlich einander verstehen, ob sie schon von den übrigen,

Digitized by Google

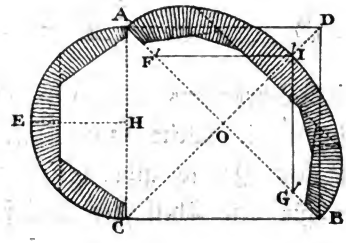
in dem Zimmer befindlichen Personen, nicht wohl können verstanden werden. Man bedient sich der Ellipse auch bey Sprachröhren, wo in dem einen Brennpunkte gesprochen wird, während der andere zugleich den Brennpunkt der Parabel bildet, die dann die Strahlen der Stimme in die Ferne verbreitet. In der Baukunst kommt sie bey Gewölbern häufig vor, wie wir gleich unten sehen werden.



470. **Erklärung.** Schneidet man eine Walze quer über ihre Achse, so gibt der Schnitt ebenfalls eine Ellipse, wie der Querschnitt eines Kegels. Betrachtet man ein Tonnengewölb als eine halbe Walze, so geben die Quer- oder Kreuzschnitte eine halbe Ellipse. Zwey unter was immer für einem Winkel zusammenstoßende gleiche Tonnengewölber **A** und **B** von gleich hohen Widerlagen bilden also bey ihrem Zusammen-Stoßungs-Punkte eine halbe Ellipse; weil die sich gleich begegnenden Punkte alle in eine Ebene fallen.

Denkt man sich die Kreuzgewölber als aus vier Stücken von über das Kreuz geschnittenen

gleichen Tonnengewölbern bestehend, so folgt hieraus eine sehr leichte Art, die zur Verschallung nöthigen Kreuzbogen zu zeichnen.

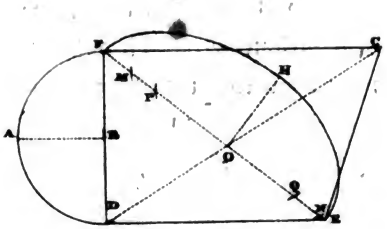


471. Aufgabe. Wenn der Hauptlehrbogen **A E C** ein halber Kreisbogen ist, die zu einem Kreuzgewölbe nöthigen Kreuzbogen zu zeichnen.

Ist die Grundfläche ein Quadrat, oder längliches Viereck, so ziehe man die Diagonallinien **A B** und **C D**, welche die Gräten oder Rippen des Gewölbes vorstellen; trage die Höhe **E H** senkrecht bey **O** auf **A B** nach **I**; fasse die Linie **A O**, und trage sie aus **I** in **F** und **G**: so sind dieses die beyden Brennpunkte, auf welchen man die Stifte befestigen, und die halbe Ellipse, wie oben gezeigt wurde, verfertigen kann. Das nämliche Verfahren gilt auch für die Linie **C D**.

Ist die Grundfläche ein Trapez oder Trapezoid, so zieht man die Linie **C D** und **E F**; trägt

Digitized by Google

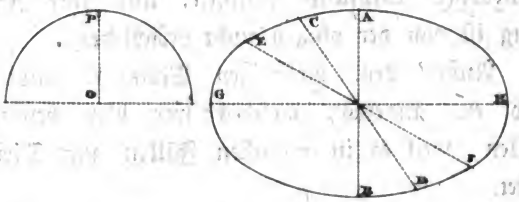


die Höhe des Lehrbogens **AB** von **O** senkrecht nach **H**; nimmt die Weite **OE**, und trägt sie aus **H** in **P** und **Q**: so gibt dieses die beyden Brennpunkte für den Theil der Ellipse auf der Linie **OE**. Nimmt man ferner **OF**, und trägt sie aus **H** in **M**, und **N** auf die Linie **EF**; so hat man die Brennpunkte für den Theil der Linie **OF**. Das nämliche Verfahren gilt auch für die Linie **CD**.

Ist die Grundfläche ein Dreyeck, oder ein unregelmäßiges Vieleck, so muß von dieser Fläche der Schwerpunkt gesucht, und aus diesem die Kreuzbogen nach den verschiedenen Winkeln gezogen werden. Den Schwerpunkt findet man am leichtesten, wenn man die Grundfläche nach dem verjüngten Maßstab auf ein gleich gehobeltes Bretchen zeichnet, dieses in zweyerley Ecken aufhängt, und nach der Richtung der Schnur überall senkrechte Linien zieht, die sich in dem Schwerpunkte durchschneiden werden, welches Verfahren auch bey den unregelmäßigen Vierecken angewandt werden kann. Nach diesem Bretchen läßt sich

Digitized by Google

dann auch der Schwerpunkt leicht im Großen bestimmen, aus welchem die Kreuzbogen mit hinlänglicher Genauigkeit nach den verschiedenen Ecken können gezogen werden.



Ist die Grundfläche eine Ellipse, oder eine aus Kreisstücken zusammengesetzte Linie, und der Lehrbogen auf der kleinen Achse **AB** ein halber Kreisbogen; so sind die sämmtlichen Bogen, über welche das Gewölb gemauert werden soll, ebenfalls Ellipsen, die sich aber nach den verschiedenen Längen ihrer Grundlinien richten, welche durch die Querlinien **CD**, **EF**, **GH** ꝛc. angezeigt sind, und wovon **OP** ihre allgemeine Höhe ist.

Aus dem, was bisher gesagt wurde, läßt sich leicht begreifen, wie die elliptischen Bogen müssen gezeichnet werden, welche bey zweyen, unter einem Winkel zusammen stoßenden gleich großen Tonnengewölbern entstehen.

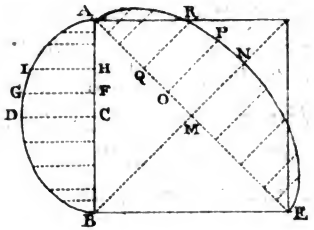
472. **Erklärung.** Ein Cylindroid ist ein walzenartiger Körper, welcher eine Ellipse zur Grundfläche hat. Wird ein Cylindroid quer über seine Achse geschnitten, so gibt der Schnitt eben-

Digitized by Google

falls eine Ellipse. Ist also der Lehrbogen zweyer, unter einem Winkel zusammen stoßender gleich großer Tonnengewölber, oder der Lehrbogen eines Kreuzgewölbes eine Ellipse; so sind die Kreuzbogen ebenfalls Ellipsen, und ihre Zeichnung ist von der obigen nicht verschieden.

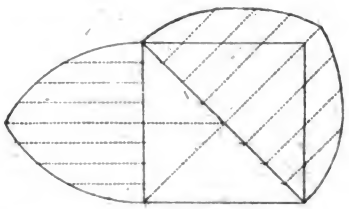
Außer dem bisherigen Verfahren gibt es noch ein anderes, welches wir hier beyfügen wollen, weil es in manchen Fällen gute Dienste leistet.

473. **Aufgabe.** Die Kreuzbogen durch eine Abscissenlinie, und die darauf gesetzten rechtwinkligen Ordinaten zu zeichnen.

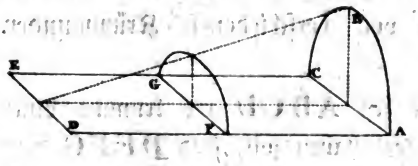


Man theile die Linie **AC** in mehrere gleiche Theile, hier in 5, den letzten Theil aber noch in zwey andere, um die Beugung desto genauer zu bekommen, und ziehe die senkrechten **CD**, **FG**, **HI** ꝛc. Theile auch die Diagonallinie **AE** in eben so viele gleiche Theile, als **AB**, und errichte die senkrechten **MN**, **OP**, **QR** ꝛc. unbestimmt; trage dann die senkrechten der Linie **AB**, nämlich **CD** nach **MN**, **FG** nach

OP, HI nach **QR** u. s. w., wodurch man die einzelnen Punkte des Gradbogens erhält, die entweder aus freyer Hand, oder durch eingeschlagene Stifte, und ein biegsames Lineal zusammen gezogen werden. Je mehr man Punkte aufträgt, desto genauer wird die krumme Linie. Daß dieses Verfahren auch bey Grundflächen von Trapezen und Trapezoiden Statt finden kann, folgt von sich selbst. Es muß aber vorzüglich da angewandt werden, wo der Lehrbogen weder ein halber Kreisbogen, noch eine halbe Ellipse, sondern eine andere von den oben beschriebenen krummen Linien oder gedruckten Bogen ist.



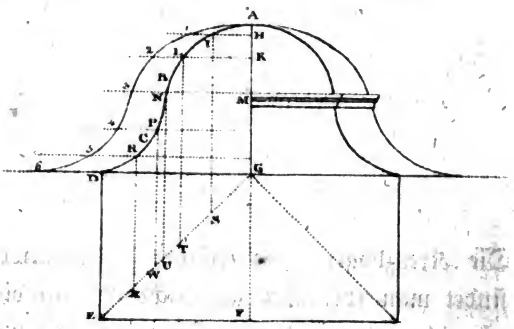
Die Kreuzbogen bey gothischen Kreuzgewölbern findet man ebenfalls am leichtesten auf diese Art, wie sich aus der Figur ersehen läßt, die nach den obigen keiner ferneren Erklärung bedarf.



Digitized by Google

474. Anmerkung. Wenn ein Tonnengewölbe **ABC** sich in eine gerade Linie **DE** endet, so sind die Schalbogen, wie **FG**, welche parallel mit **AC** gesetzt werden, Ellipsen, die immer niederer werden, je mehr sie sich der Linie **DE** nähern.

475. Anmerkung. Weil man die Gradlinien von Thurmkuppeln betrachten kann, als wenn ein nach verschiedenen Krümmungen zusammengesetzter Körper mit einer Fläche durchschnitten wäre, wovon der Schnitt die Gradlinie bilden würde; so können auch diese auf eine nicht viel unähnliche Art gefunden werden.



476. Aufgabe. Die Gradlinien der Thurmkuppeln von verschiedenen Krümmungen aufzureissen.

Es sey **ABCD** die krumme Linie, welche die Kuppel haben soll, und **DEFG** die dazu gehörige Grundfläche; so ziehe man verschiedene

Parallelen **HI**, **KL**, **MN** ꝛc. und verlängere sie unbestimmt. Aus **I**, **L**, **N**, **P** und **R** lasse man senkrechte auf die Grundlinie **DG** herunter, die bis an die Diagonallinie **EG**, über welche die Gradlinie zu stehen kommt, verlängert werden. Man nehme dann auf dieser Linie die Länge **GS**, und trage sie von **H** nach 1, dann **GT** von **K** nach 2, **GU** von **M** nach 3 u. s. w.; so geben die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, wenn sie zusammen gezogen werden, die verlangte Gradlinie.

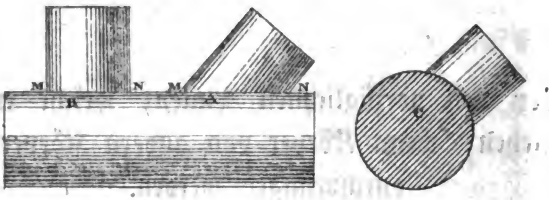
Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von andern Körpern durchdrungen werden.

477. **Erklärungen.** Wenn gleiche oder ungleiche Kugeln sich einander durchdringen, so gibt der Schnitt auf der gebogenen Oberfläche allemal eine Kreislinie. Wird eine Kugel von einem Kegel, oder einer senkrechten Walze so durchdrungen, daß ihre Achsen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; so gibt der Schnitt ebenfalls eine Kreislinie.

478. Wenn zwey Walzen von gleicher Größe sich so durchdringen, daß sich ihre Achsen unter was immer für einem Winkel antreffen, und ihre gebogenen Oberflächen nicht über einander

Digitized by Google

hervor stehen, so gibt der Schnitt eine Ellipse. Das Nämliche gilt auch, wenn zwey gleich große Cylindroiden sich einander durchdringen; denn es ist eben so viel, als wenn sie von einer Fläche unter gleichen Winkeln durchschnitten, und zusammen gesetzt würden, daher diese beyden letzten Fälle bereits oben Nro. 470 und 472. angezeigt wurden. Sind die Bogen der durchschneidenden Cylindroiden überhoben, so kann der Durchschnitt auch zum Kreise werden.



479. Wenn zwey Walzen von ungleichen Durchmessern sich so einander durchdringen, daß sich ihre Achsen unter einem rechten Winkel begegnen, so ist der Durchschnitt eine Cykloimber; begegnen sich aber die Achsen unter einem spitzigen oder stumpfen Winkel, so entsteht eine Ellipsimber. Ueberhaupt erhält man allemal eine Cykloimber, wenn die erzeugende oder durchschneidende Linie einen Kreis, und eine Ellipsimber, wenn die durchschneidende Linie eine Ellipse ist. Um dieses zu erkennen, darf man nur bedenken, ob der Durchmesser der durchschneidenden Walze, wenn er mit beyden Enden **M** und **N** an der Walze

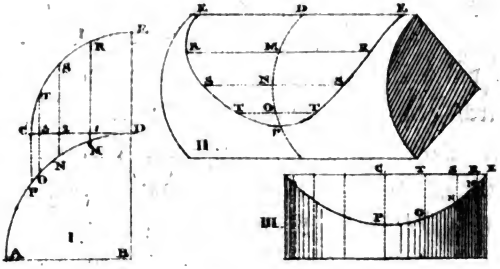
liegt, sich verlängert oder nicht; wo denn im ersten Falle eine Ellipsimber, wie bey **A**; im zweyten aber eine Cykloimber, wie bey **B**, entsteht. Treffen sich die beyden Achsen der durchschneidenden Körper nicht einander an, sondern liegen über oder unter einander, wie bey **C**; so ist aus der obigen Ursache der Durchschnitt ebenfalls eine Ellipsimber.

480. Wird eine Kugel von einer Walze so durchdrungen, daß die Achse der Walze nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht; so gibt der Durchschnitt ebenfalls eine Ellipsimber, wie man aus dem, was oben gesagt wurde, leicht abnehmen kann. Wenn eine größere Walze von einer kleinern, oder eine Kugel von einer Walze nur zum Theile durchdrungen wird; so entsteht eine zusammengesetzte unvollkommene Ellipsimber. Es ist leicht begreiflich, daß, wenn eine Walze von einem Cylindroiden, oder wenn sich zwey ungleiche Cylindroiden einander durchdringen, der Durchschnitt ebenfalls eine Ellipsimber seyn müsse.

Weil die Durchschnitte von Kegeln, Parabeln und Hyperbeln sehr selten vorkommen, so wollen wir hier bloß die Zeichnung der Cykloimber und Ellipsimber betrachten, welche entstehet, wenn Walzen einander durchdringen, oder Kugeln von Walzen durchdrungen werden. Diese Linien von einer doppelten Krümmung las-

Digitized by Google

sen sich nicht, wie die Ellipse, auf einer Fläche, sondern nur auf den Körpern, auf welchen sie entstehen, aufreissen. Man kann zwar die einzelnen Punkte auf eine Fläche bringen; sie bilden aber die eigentliche krumme Linie erst dann, wenn diese Fläche über den dazu gehörigen Körper gebogen, und die Linie darnach aufgerissen wird.



481. **Aufgabe.** Die Cykloimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn die beyden Achsen zweyer ungleicher Walzen sich senkrecht durchschneiden.

Es sey der Halbmesser der größern Walze **AB**, Fig. **I.**, der kleinern **CD**; so setze man sie parallel über einander, wie die Figur zeigt; beschreibe die Bogen **AD** und **CE**; theile den kleinen Bogen **CE** in mehrere gleiche Theile **T**, **S**, **R**, **E**, und ziehe parallel mit **ED** die Linien **RM**, **SN**, **TO**, **CP**; so hat man die Vorbereitungs-Figur, aus welcher das Nöthige sowohl für die größere, als kleinere Walze kann genommen werden.

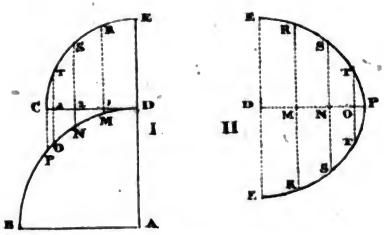
Digitized by Google

Um die Cykloimber auf die größere Walze zu bringen, mache man auf dieselbe einen Bogen **DP** Fig. **II.**, welcher die Länge von **DP** Fig. **I.** haben muß; trage **DM** nach **DM**, **NM** nach **NM**, und **OP** nach **OP** in die Fig. **II.** und ziehe durch diese Punkte die Parallelen **EE**, **RR**, **SS**, **TT**; trage ferner aus Fig. **I.** **DE** nach **DE** in die Fig. **II.**, **1R** von **M** in **RR**, **2S** von **N** in **SS**, und **3T** von **O** in **TT**: so hat man auf der Walze die Punkte einer halben Cykloimber, welche aus freyer Hand zusammen gezogen, und auf der entgegengesetzten Seite wiederholt werden kann.

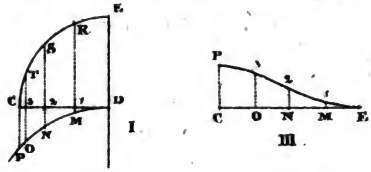
Auf der kleinern Walze Fig. **III.** werden aus Fig. **I.** die Bogen **CTSRE** auf den Umkreis der Grundfläche getragen, welche Fig. **III.** durch die Punkte **CTSRE** vorgestellt sind. Auf diese zieht man Parallelen mit der Achse, und trägt **CP** aus Fig. **I.** nach **CP** Fig. **III.**, **3O** nach **TO**, **2N** nach **SN**, **1M** nach **RM**, wo sie die Punkte der Cykloimber auf einem Viertheile der kleinern Walze geben, die auf den übrigen Theilen des Umkreises wiederholt werden können.

Will man lieber durch Ueberbiegen eines steifen Papieres die Cykloimber auf die beyden Walzen bringen, so mache man wieder eine Linie **DP**, Fig. **II.**, von der Länge des Bogens **DP** Fig. **I.** trage die Bogen **DM**, **MN**, **OP**

Digitized by Google



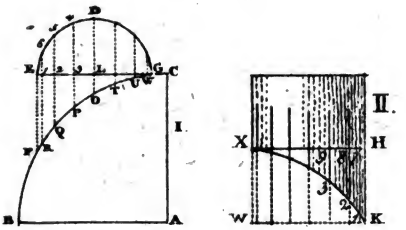
aus der Fig. I. nach **DM**, **MN**, **NO** und **OP** in die Figur II.; ziehe die senkrechten **DEE**, **MRR**, **NSS** und **OTT**; trage **DE** aus der Fig. I. nach **DE** in die Fig. II., **1R** aus **M** nach **RR**, **2S** aus **N** nach **SS**, **3T** aus **O** nach **TT**: so erhält man durch Zusammenziehung der Punkte die Fig. II., welche durch Beugung über die größere Walze die verlangte Cykloimber gibt.



Für die kleinere Walze trage man aus der Vorbereitungs-Figur I. die Theile **ERSTC** in die Fig. III. aus **C** nach **ONME**, wo **EC** die Länge von dem Bogen **EC** Fig. I. haben soll. Man trage ferner aus der Fig. I. **CP**, **3O**, **2N**, **1M** in die Fig. III. von **C** nach **P**, von **O** nach 3, von **N** nach 2, und von **M** nach 1; so hat man den vierten Theil der Figur, welche durch Beugung über die kleinere Walze die verlangte Cykloimber

Digitized by Google

gibt, die um so viel genauer seyn wird, je mehr man Punkte auf den gegebenen Bogen angenommen hat.



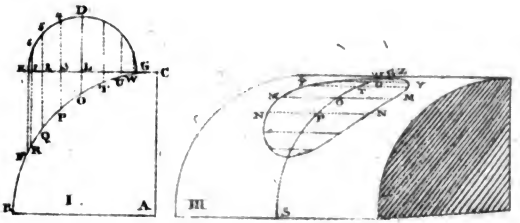
482. Aufgabe. Die Ellipsimber zu beschreiben, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern in senkrechter Richtung so durchdrungen wird, daß die Achsen einander nicht begegnen.

Man setze die beyden Grundflächen der Walzen Fig. I. nach der Lage ihrer Durchmesser über einander; theile den Kreis **GDE** in mehrere gleiche Theile, und ziehe die senkrechten **DO**, **4P**, **5Q** ꝛc.: so hat man wieder die Vorbereitungs-Figur.

Die Ellipsimber auf der kleinen Walze erhält man, wenn man ihren halben Umkreis an der Grundfläche in eben so viele Theile eintheilt, als **GDE**; aus diesen Theilen Fig. II. senkrechte **HK**, 17, 28 ꝛc. errichtet, die Länge **EF** nach **HK** trägt, und **HX** parallel mit **KW** zieht. Auf diese wird **1R** nach 17, **2Q** nach 28 ꝛc. getragen, und an die dadurch erhaltenen Punkte die krumme Linie **KX** gezogen, welche die Ellipsim-

Digitized by Google

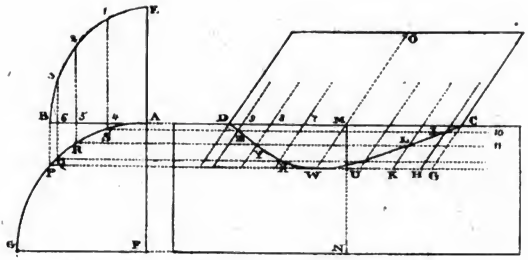
der auf der halben Walze gibt, wozu die andere gleiche Hälfte auf die nämliche Art gefunden wird.



Auf die größere Walze wird wieder die Kreislinie **ZS** parallel mit der Grundfläche gezogen, und die Theile **CG**, **GW**, **WU** ꝛc. aus der Vorbereitungs-Figur **I.** in die Fig. **III.** von **Z** nach **W**, von **W** nach **U**, von **U** nach **T** ꝛc. getragen. Durch diese Punkte zieht man die Parallelen **NN**, **MM** ꝛc. und trägt aus der Vorbereitungs-Figur die Längen **LD**, **34**, **25**, in die Fig. **III.**, aus **O** in **MM**, aus **P** in **NN**, und aus **T** in **YY** ꝛc., wodurch man die einzelnen Punkte der Ellipsimber erhält, die man aus freyer Hand zusammen ziehen kann.

Das Verfahren, die Ellipsimber durch eine gerade biegsame Fläche auf die beyden Walzen zu bringen, ist von dem der Cykloimber nicht unterschieden.

Digitized by Google



483. **Aufgabe.** Die Ellipsimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern nach einer schiefen Richtung so geschnitten wird, daß ihre Achsen einander begegnen.

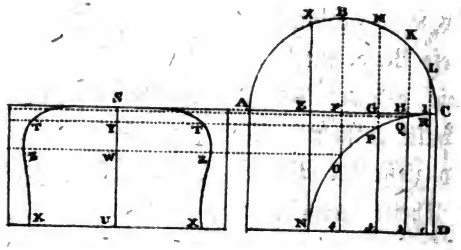
Es sey der Halbmesser der kleinern Walze **AB**, die schiefe Lage unter dem Winkel **OMC**; so ist **CD** die größere Achse, welche durch den schiefen Schnitt entsteht. Man setze **MD** von **A** nach **E**, und ziehe die Viertel-Ellipse **EB**, welche, in gleiche Theile getheilt, die senkrechten **1S**, **2R**, **3Q**, **BP** gibt. Trägt man nun die Längen **AE**, 4 1, 5 2, 6 3 von **M** nach 7, 8, 9 **D**, und von **M** die nämlichen Theile auch gegen **C**; zieht aus **PQRS** Parallelen mit **CD**; aus 7, 8, 9 aber Parallelen mit **OM**: so geben die Durchschneidungspunkte **W**, **X**, **Y**, **Z**, **D** die nöthigen Theile für die Ellipsimber.

Um diese wirklich auf die größere Walze zu bringen, darf man nur wieder die Linie **MU**

Digitized by Google

parallel mit der Grundfläche ziehen, und auf diese die Längen **AS**, **SR** ꝛc. tragen, auf welche man die Parallelen mit **CD**, nämlich **Z** 10, **Y** 11, ꝛc. von der nämlichen Länge setzen kann, wie die Figur zeigt; wo man finden wird, daß von diesen Parallelen nur **CD** von **MN** in zwey gleiche Theile getheilt wird; alle übrigen aber in ungleiche Theile zerfallen.

Die Linien, welche, von **C** und **D** angefangen, auf die kleine Walze getragen werden, sind **GC**, **HI**, **KL** ꝛc., welche dort wieder die Punkte der Ellipsimber geben.



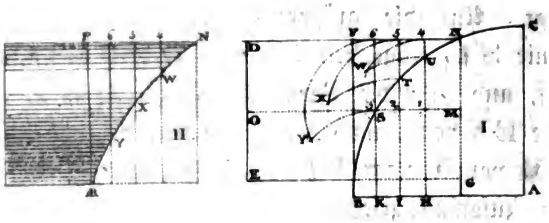
484. **Aufgabe.** Die zusammengesetzte unvollkommene Ellipsimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern nur zum Theile durchdrungen wird.

Es soll die größere Walze von der kleinern **ABC** bis an die Linie **XN** durchdrungen wer-

den, so setze man die Grundflächen wieder über einander, und ziehe die Parallelen, wie die Figur zeigt. Auf die größere Walze ziehe man die Linie **SU**, trage den Bogen **NOPQRC** darauf, und ziehe die Parallelen **NUX**, **OWZ** ꝛc.; setze **EX** von **U** nach **XX**, **FB** von **W** nach **ZZ**, **GM** von **Y** nach **TT** ꝛc.: so hat man die Hälfte der zusammengesetzten unvollkommenen Ellipsimber auf der größern Walze. Auf die kleinere zieht man **ND**, parallel mit der Grundfläche, welche die Länge von dem Bogen **XC** haben soll, und trägt die Bogen **XB**, **BM** ꝛc. darauf. Werden nun auf diese Punkte die Parallelen nach ihrer Länge **4O**, **3P**, **2Q** ꝛc. senkrecht auf **DN** gesetzt; so bilden die Endespunkte dieser senkrechten ein Viertheil der zusammengesetzten unvollkommenen Ellipsimber auf der kleinern Walze.

Nach dem, was bisher gezeigt wurde, wird es leicht seyn, diese Ellipsimber auch auf eine biegsame Fläche zu zeichnen. Eben so wenig Schwierigkeiten ist die Zeichnung der Ellipsimber unterworfen, welche entsteht, wenn zwey Cylindroiden einander durchdringen, oder wenn eine Walze von einem Cylindroiden durchdrungen wird; weil man nur ihre beyderseitigen Grundflächen gehörig über einander setzen, und auf eine ähnliche Art, wie bisher, verfahren darf.

Digitized by Google



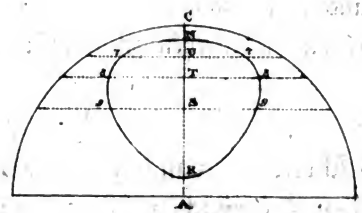
485. **Aufgabe.** Die Ellipsümber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine Kugel von einer Walze so durchdrungen wird, daß die Achse der Walze nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Es sey der Halbmesser der Kugel **AB**, Fig. **I.**, und der Durchmesser der Walze **DE**, so dringt die Walze nach der Richtung von **DN** und **EG** in die Kugel. Man ziehe also **FB** und **NG** parallel mit **AC**, und theile **FN** in beliebige Theile, aus welchen man die senkrechten **4H**, **5I** ꝛc. auf **BG** herabläßt, welche die Achse **OM** in 1, 2, 3, und den Halbmesser der Kugel in **HIK** schneiden. Man setze nun den Zirkel in 1, 2, 3, und mache mit 14 die Bögen **4W**, **5X**, **6Y**; diese durchschneide man aus **H** mit **HU**, aus **I** mit **IT**, und aus **K** mit **KS**: so geben **WXY** die Hauptpunkte der Ellipsümber.

Auf der Walze Fig. **II.** mache man parallel mit der Grundfläche die Kreise **456F**, und trage

Digitized by Google

aus der Figur I. die Bogen 4W, 5X, und 6Y darauf; so gibt NWXYR die Punkte der Ellipsimber. In der Zeichnung wurden die Bogen 4W, 5X, 6Y in senkrechter Richtung in die Fig. II. von 4 nach W ꝛc. getragen; weil sich sonst die Sache nicht wohl deutlich vorstellen läßt.



486. Auf der Kugel ziehe man eine größte Kreislinie AC; bestimme durch den Bogen CN aus der Fig. I. den Punkt N auf der Kugel, und trage die Bogen NU, UT ꝛc. aus der Fig. I. von N nach U, T, S, R, aus welchen die parallelen Kreise 7 7, 8 8, 9 9 gezogen, und aus der Fig. I. die Bogen UW in die Kugel von U nach 7 7, TX von T nach 8 8, und SY von S nach 9 9 getragen werden, welche die verlangte Ellipsimber geben.

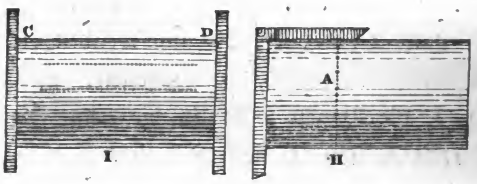
487. **Anmerkung.** Betrachtet man die Tonnengewölber als halbe Walzen, und die Ku-

Digitized by Google

gelgewölber als halbe Kugeln; so wird man finden, daß die Cykloimber und Ellipsimber nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Baukunst bey den Thüren, Fenstern, Stiegen, welche in die Gewölber geführt werden, und da, wo sich die Gewölber selbst einander durchschneiden, häufig zum Vorscheine kommen. Die Durchschnitte der übrigen Körper sind weit seltner, und können zum Theile aus dem Bisherigen ermessen werden; daher man sie hier übergehen zu können glaubt.

Von der Beschreibung einiger Linien auf den gebogenen Oberflächen der Körper.

488. Aufgabe. Mit der Achse gleichlaufende Linien auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze zu ziehen. Fig. I.

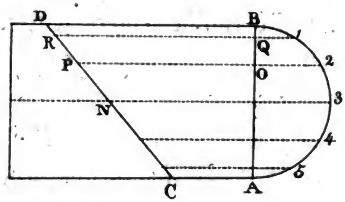


Man lege an die Mittelpunkte der untern und obern Kreisfläche gerade Lattenstücke; richte sie durch Absehen so lange, bis sie sich einander de-

cken, und ziehe darnach eine Linie **C D**, mit welcher man die übrigen parallel ziehen kann.

489. **Aufgabe.** Auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze eine, mit der Grundfläche gleichlaufende Kreislinie zu beschreiben. Fig. II.

Man lege einen Winkelhacken an die Grundfläche; bemerke auf demselben den auf der Walze gegebenen Punkt **A**, durch welchen die Kreislinie gehen soll, wende dann das Winkelmaß um die ganze Walze herum, und zeichne so viele Punkte an, als man nöthig zu haben glaubt, welche, mit einem biegsamen Lineal zusammen gezogen, die verlangte Kreislinie geben.

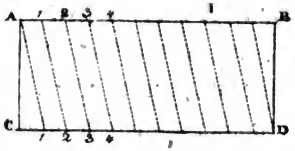


490. **Aufgabe.** Auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze eine Ellipse zu beschreiben.

Man zeichne auf einer Fläche den halben Umkreis der Walze **A 3 B**; theile ihn in beliebige gleiche Theile, ziehe aus den Punkten 1, 2, 3 ꝛc. die Parallelen **1 R**, **2 P**, **3 N** ꝛc., und durch diese die Linie **D C** nach der Lage, welche die

Digitized by Google

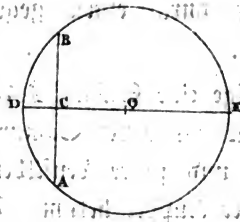
Ellipse auf der Walze haben soll. Trägt man nun die Theile 1, 2, 3 ꝛc. aus der Zeichnung auf den Umkreis der Walze, und zieht auf diese die Linien **BD**, **QR**, **OP** ꝛc., denen man die nämliche Länge, wie in der Zeichnung gibt: so kann durch die Punkte **DRPN** ꝛc. die verlangte Ellipse beschrieben werden.



491. **Aufgabe.** Die Schraubenlinie auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze zu zeichnen.

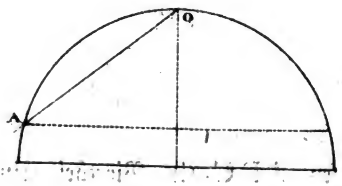
Man mache das Netz von der gebogenen Oberfläche **ABCD** nach Nro. 366; theile sowohl **AB**, als **CD** in gleiche Theile, welche die Höhe von der gleichförmigen Steigung der Schraubenlinie haben sollen, und ziehe die transversalen **A1**, **12**, **23** ꝛc. Wird dieses Netz um den dazu gehörigen Cylinder gewickelt, so lassen sich darnach die Gänge der Schraube ausarbeiten. Bey Schneckenstiegen, wo die Stufen ebenfalls gleichförmig steigen, kann man mit einem Dreyecke **A1C** zufrieden seyn, und dasselbe so oft um die Spindel wickeln, als man es für nöthig hält.

Digitized by Google



492. Aufgabe. Den Durchmesser, und den Pol einer kugelförmigen Kuppel zu finden.

Man ziehe auf den Umkreis der Grundfläche mit einer Schnur eine beliebige Sehne **A B**; theile sie bey **C** in zwey gleiche Theile, und ziehe rechtwinklig auf **C** eine andere Schnur **E D**: so gibt diese den Durchmesser. Wird dieser bey **O** wieder in zwey gleiche Theile getheilt, und mittelst des Senkbleyes eine senkrechte aus **O** in die Höhe der Kuppel errichtet; so durchschneidet diese den Pol der Kuppel.

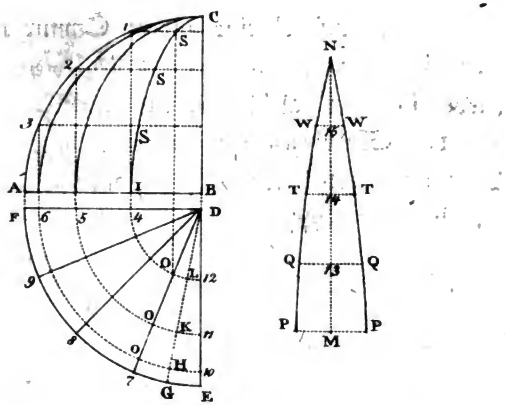


493. Aufgabe. In die hohle Fläche einer kugelförmigen Kuppel einen Kreis parallel mit

der Grundfläche durch einen gegebenen Punkt **A** zu beschreiben.

Man befestige eine Schnur **AO** an den Pol **O**; halte an das Ende der Schnur bey **A** einen färbigen Stift, und führe denselben mit gleicher Spannung in der Kuppel herum. Um Kreise auf die gebogene Oberfläche zu ziehen, müßte auf dem Pole eine senkrechte Stange errichtet, und die Schnur daran befestiget werden.

494. **Aufgabe.** Die Lehre, zu dem Netze einer kugelförmigen Kuppel zu verfertigen.



Es sey **ABC** ein Viertheil einer kugelförmigen Kuppel, wovon **DEF** die Grundfläche ist; so theile man den Bogen **AC** in mehrere gleiche Theile; ziehe 3 6, 2 5, 1 4, und aus diesen auf der Grundfläche die Bogen 6 10, 5 11, 4 12;

Digitized by Google

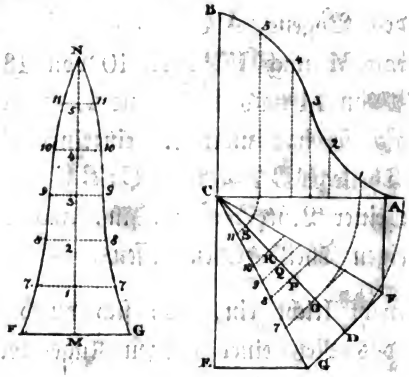
theile ferner den Bogen **EF** in die gleichen Theile 7, 8, 9**F**, und ziehe die Linie **DG**, welche 7**E** in zwey gleiche Theile zertheilt. Man errichte dann die senkrechte **MN**, und trage **A** 3 von **M** nach 13, 32 von 13 nach 14 ꝛc. so, daß **MN** die Länge des Bogens **AC** erhält. Trägt man nun **GE** von **M** nach **PP**, **H** 10 von 13 nach **QQ**, **K** 11 von 14 nach **TT**, und **L** 12 von 15 nach **WW**; so hat man die einzelnen Punkte von einem Theile **ED**7**E** oder **CIBC** der Kuppel, der zu einer Lehre dienen kann, nach welcher sich die übrigen Theile ziehen lassen.

Man sieht leicht ein, daß sich durch dieses Verfahren das Netz einer ganzen Kugel weit genauer und bequemer finden läßt, als bey Nro. 377 gezeigt wurde, weil man auf **MN** so viele Punkte nehmen kann, als man dazu für nöthig erachtet.

Zieht man aus den Punkten **OOO** des Grundrisses Parallelen mit **EC**, und aus 1, 2, 3 Parallelen mit **AB**; so geben die Durchschnitte **SSS** die Punkte, durch welche sich der Kreisbogen über 7**D** von dem Pole **C** auf den Umkreis der Grundfläche **AB** ziehen läßt, wie dieses manchmal in den geometrischen Zeichnungen der Durchschnitte von Kuppeln vorkommt. Die Bogen über 8**D**, und 9**D** werden eben so, wie die über 7**D** in den Standriß oder Durchschnitt

Digitized by Google

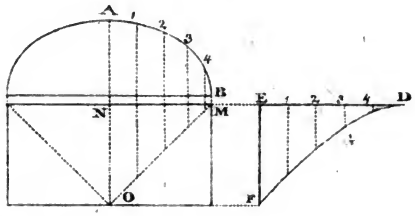
A B C gebracht. Die Behandlungsart der elliptischen Kuppeln oder der mit überhobenen Bogen, ist ganz die nämliche, wie man sich durch Vergleichung der beyden Figuren leicht überzeugen kann.



Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, oder eine simetrische Figur, **A F G E C**, und die gebogene Oberfläche aus verschiedenen Krümmungen zusammen gesetzt, wie **A 1 2 3 4 5 B**; so werden wieder die Bogen **A 1, 1 2, 2 3** ꝛc. von **M** nach **N** getragen, die Linien **D F** von **M** nach **F** und **G**, **O 7** von **1** nach **7 7** ꝛc. gesetzt, welche ebenfalls die Punkte zum Netze über den Theil der Grundfläche **G C F** geben. Diese Netze dienen auch, um die Menge des Materials, welches zur Bedeckung der Kuppeln nöthig ist, daraus zu ermessen.

Digitized by Google

495. Aus dem bereits Angeführten läßt sich auch begreifen, wie die hohlen Oberflächen verschiedener Gewölber und anderer Körper, die aus verschiedenen krummen Linien zusammen gesetzt sind, sich in einer ausgestreckten Fläche darstellen lassen. Wir wollen hier nur noch die hohle Oberfläche eines offenen Kreuzgewölbes, das einen gedruckten Bogen aus Kreisstücken zum Lehrbogen hat, betrachten.



Man theile den halben Bogen **AB** in mehrere gleiche Theile, 1, 2, 3, 4 ꝛc. und ziehe die senkrechten auf die Grundfläche bis an die Gradlinie **MO**, trage die Theile **A** 1 2 3 ꝛc. auf die gerade Linie **DE**; so stellt diese den ausgestreckten Bogen **AB** vor. Zieht man nun auf **DE** die senkrechte **EF**, und aus den Punkten 1, 2, 3, 4 ꝛc. Parallelen mit **EF**, denen man die Länge der senkrechten von der Grundfläche gibt; so können die Endespunkte zusammen gezogen, und dadurch die gebogene Fläche über **MON** gezeichnet werden. Nimmt man die wenig gebogenen Linien **FG** und **GD** als gerade Linien an, wie

Digitized by Google

dieſes in der praktiſchen Meßkunſt wegen des unbedeutenden Ausſchlages durchaus gewöhnlich iſt; ſo kann **FG3E** als ein Trapez, und **G3D** als ein Dreyeck berechnet, und dadurch der Flächeninhalt mit hinlänglicher Genauigkeit beſtimmt werden, woraus ſich auch der Kubikinhalt des ganzen Gewölbes ergibt.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Ich bin mir bestimmt bewusst, dass ich existiere, u. zwar in einer od. während einer gewissen Zeit, dh. dass ich in meiner Existenz eine gewisse Zeit beharre. Damit habe ich den Begriff des Beharrlichen bekommen. Derselbe ist aber keine Anschauung in mir, da in mir nur ~~Vorstellungen~~ aufeinanderfolgende Vorstellungen sind u. dieselben etwas von ihnen unterschiedenes Beharrliches bedürfen, worauf sie bezogen werden können, da sonst von keinem Zusammenhang dessen [illegible] die Rede sein könnte u. eben so wenig ihr Wechsel, ihre Veränderung erkannt würde. Die Wahrnehmung dieses Beharrlichen ~~[illegible]~~ ist also von einem Beharrlichen ausser mir verursacht. Mein Dasein in der Zeit kann daher nur durch diesen Beharrliche ausser mir bestimmt werden.